#1.mw

20

Opgaveformulering

Isolér s i udtrykket

$$p = \frac{4}{r+s}.$$

Besvarelse

$p = \frac{4}{r+s}$: ⇔ multiplikation med (r+s) på begge sider

$p(r+s) = 4$: ⇔ division med på begge sider

$r+s = \frac{4}{p}$: ⇔ r trækkes fra på begge sider

$s = \frac{4}{p} - r$:

36

Opgaveformulering

Bestem værdien af $\frac{5m}{2m^2+3mn}$, når $m=1$ og $n=2$, og reducér $\frac{5m}{2m^2+3mn}$.

Besvarelse

m=1 og n=2 indsættes og vi får: $\frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{5}{8} = 0.625$:

Man kan reducere ved at forkorte med m i tæller og nævner og får: $\frac{5}{2\,m+3\,n}$:

88

Opgaveformulering

Reducér udtrykket $(p-2q)^2 + 4pq - (p-q)(p+q)$.

Besvarelse

$(p-2q)^2+4pq-(p-q)\cdot(p+q):=$
$p^2+(2q)^2-2(p)\cdot(2q)+4pq-(p^2-q^2):=$
$p^2+4q^2-4pq+4pq-p^2+q^2:=$
$5q^2:$

105

Opgaveformulering

Isolér d i

$$R=\frac{4\cdot p}{\pi\cdot d^2}\cdot l\,.$$

Besvarelse

$R=\frac{4\cdot p}{\pi\cdot d^2}\cdot l:$ ⇔Multiplicer med d^2 på begge sider
$R\cdot d^2=\frac{4\cdot p\cdot l}{\pi}:$ ⇔Divider med R på begge sider
$d^2=\frac{4\,pl}{R\pi}:$ ⇔Kvadratrod på begge sider (2 løsninger)
$d=\pm\sqrt{\frac{4\,pl}{R\pi}}:$

120

Opgaveformulering

Reducér udtrykket $(a+3b)^2+b(a-9b)-7ab$.

Besvarelse

$(a+3b)^2+b(a-9b)-7ab:=$
$a^2+(3b)^2+2\cdot(a)\cdot(3b)+b\cdot a-b\cdot(9b)-7ab:=$
$a^2+9b^2+6ab+ab-9b^2-7ab:=$
$a^2:$

151

Opgaveformulering

Reducér udtrykket $(a+2b)^2-(a+2b)(a+b)$.

Besvarelse

$(a+2\,b)^2-(a+2\,b)\cdot(a+b):=$
$a^2+(2\,b)^2+2(a)(2\,b)-\left(a^2+ab+2\,ba+2\,b^2\right):=$
$a^2+4\,b^2+4\,ab-a^2-3\,ab-2\,b^2:=$
$2\,b^2+ab:$

167

Opgaveformulering

Løs ligningen $x^2+x-12=0$.

Besvarelse

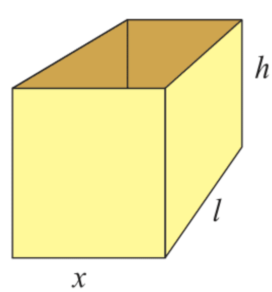
Jeg ved at roddernes produkt giver c=-12 og at deres sum giver -b=-1.

På den baggrund kan jeg gætte at røderne er 3 og -4.

200

Opgaveformulering

En bestemt affaldscontainer har form som en åben kasse. Sammenhængen mellem kassens højde h og kassens bredde x er $3x+h=3$, mens sammenhængen mellem kassens længde l og kassens bredde er $l=2x$.



Bestem kassens rumfang udtrykt ved x.

Besvarelse

kassens bredde er x
kassens længde er l= 2x
kassens højde findes ved d at isolere h i 3x+h=3⇔h=3-3x

Rumfanget er produktet af de tre: $x \cdot l \cdot h = x \cdot 2\,x \cdot (3-3\,x) = 2\,x^2(3-3\,x) = 6\,(x^2-x^3)$: .

209

Opgaveformulering

Reducér udtrykket $(a-b)^2+2a(a+b)-b^2$.

Besvarelse

$(a-b)^2+2\,a(a+b)-b^2$: =
$a^2+b^2-2\,ab+2\,a^2+2\,ab-b^2$: =
$3\,a^2$:

223

Opgaveformulering

Reducér udtrykket $(a-b)(a+b)-2a^2+b^2$.

Besvarelse

$(a-b)(a+b)-2\,a^2+b^2$: ⇔
$a^2-b^2-2\,a^2+b^2$: =
$-a^2$:

226

Opgaveformulering

Bestem tallet c, så andengradsligningen $3x^2-2x+c=0$ har netop én løsning.

Besvarelse

Der netop en løsning når diskriminanten $b^2-4\,ac$: er 0.
a er 3, b er -2, det indsættes i ligningen der løse mht til c:

$(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot c = 0 \Leftrightarrow 4 - 12\,c = 0 \Leftrightarrow 4 = 12\,c \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$:

Der er netop en løsning når c er 1/3.

238

Opgaveformulering

Reducér udtrykket $(p+q)^2 - (p^2 - q^2) - 2pq$.

Besvarelse

$(p+q)^2 - (p^2 - q^2) - 2\,pq$: =

$p^2 + q^2 + 2\,pq - p^2 + q^2 - 2\,pq$: =

$2q^2$:

355

Opgaveformulering

Reducér udtrykket $(p-q)^2 + 2pq - q^2$.

Besvarelse

$(p-q)^2 + 2\,pq - q^2$: =

$p^2 + q^2 - 2\,pq + 2\,pq - q^2$: =

p^2 :

402

Opgaveformulering

Undersøg, om $x = 3$ er en løsning til ligningen $x^3 - 9 \cdot x^2 + 23 \cdot x - 15 = 0$.

Besvarelse

Vi indsætter: $3^3 - 9 \cdot 3^3 + 23 \cdot 3 - 15 = 27 - 81 + 69 - 15 = 0$:

Det stemmer så x=3 ER en løsning.

473

Opgaveformulering

Reducér

$$(x+5)^2-25 \ .$$

Besvarelse

$(x+5)^2-25 = x^2+25+2\cdot x\cdot 5-25 = x^2+10\,x = x(x+10)$:

489

Opgaveformulering

Reducér udtrykket

$$(a+b)\cdot(a-b)+b\cdot(b+2a)\ .$$

Besvarelse

$(a+b)\cdot(a-b)+b\cdot(b+2\,a)$: =

$a^2-b^2+b^2+b\cdot 2\,a$: =

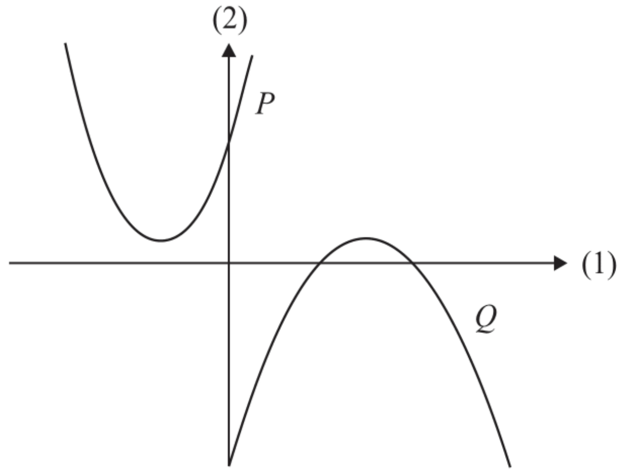
a^2+2ab :

#2.mw

90

Opgaveformulering

På figuren ses to parabler P og Q. Hver af parablerne er graf for en funktion af typen $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Gør rede for fortegnet for a og c samt diskriminanten d for hver af de to parabler.

Besvarelse

P har grenene opad så a er positiv. P har ingen rødder så d er negativ.
Q har grenene nedad så a er negativ. Q har 2 rødder så d er positiv.

104

Opgaveformulering

Bestem koordinatsættet til toppunktet for parablen med ligningen

$$y = x^2 - 6x + 19 .$$

Besvarelse

a =1 og b=-6. Det indsættes i formlen for x-koordinaten til toppunktet: -b/2a = -(-6)/(2*1)=3.
y-koordinateten findes ved at insætte det funde x: y = 3^2 - 6*3 + 19 = 10.

Så toppunktets koordinater er : (3,10).

181

Opgaveformulering

Bestem koordinatsættet til toppunktet for parablen givet ved ligningen $y = 2x^2 - 8x + 3$.

Besvarelse

a =2 og b=-8. Det indsættes i formlen for x-koordinaten til toppunktet: -b/2a = -(-8)/(2*2)=2.
y-koordinateten findes ved at insætte det funde x: y = 2*2^2 - 8*2 + 3 = -5.

Så toppunktets koordinater er : (2,-5).

213

Opgaveformulering

En parabel er givet ved ligningen

$$y = x^2 - 2x - 8.$$

Bestem koordinatsættet til parablens skæringspunkter med førsteaksen.

Besvarelse

1.koordinaterne til grafens skæringer er det samme som nulpunkter/rødder.

Jeg ved at røddernes produkt giver c=-8 og at deres sum giver -b=-(-2)=2.

På den baggrund kan jeg gætte at røderne er -2 og 4.
Rødderne indsat på højresiden i ligningen skal give 0, så det kontrolles at det stemmer, og det gør det.

Da der spørges om koordinatsættene er det endelige svar: (-2, 0) og (4, 0).

266

Opgaveformulering

En parabel er graf for funktionen

$$p(x) = x^2 - 10x + 24.$$

Bestem førstekoordinaten til hvert af parablens skæringspunkter med førsteaksen.

Besvarelse

1.koordinaterne til grafens skæringer er det samme som nulpunkter/rødder.

Jeg ved at røddernes produkt giver c=24 og at deres sum giver -b=-(-10)=10.

På den baggrund kan jeg gætte at de to 1.koordinater (røderne) er 4 og 6.

Rødderne indsat på højresiden i ligningen skal give 0, så det kontrolles at det stemmer, og det gør det.

296

Opgaveformulering

En parabel er graf for en funktion med forskriften $f(x) = 2x^2 - 8x + 15$.

Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.

Besvarelse

a =2 og b=-8. Det indsættes i formlen for x-koordinaten til toppunktet: -b/2a = -(-8)/(2*2)=2.
y-koordinateten findes ved at insætte det funde x: y = 2*2^2 - 8*2 + 15 = 7.

Så toppunktets koordinater er : (2,7).

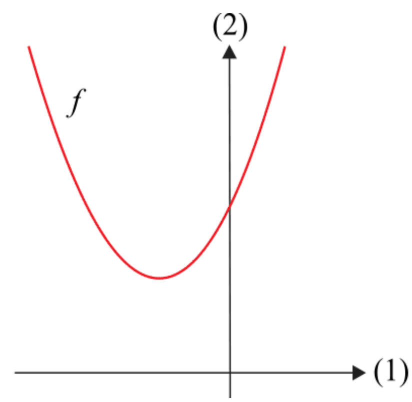
328

Opgaveformulering

På figuren ses en parabel, der er graf for et andengradspolynomium givet ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Gør rede for, at tallene *a*, *b* og c er positive, samt at andengradspolynomiets diskriminant er negativ.



Besvarelse

Grenene vender opad altså er a positiv.

Grafen skærer y-aksen over x-aksen dvs i en positiv værdi så c er positiv.

Hældningen af tangenten i skæringen med y-aksen er positiv så b er positiv.
(Man kan også begrunde det med at toppunktet ligger til venstre for x-aksen så a og b har samme fortegn)

Grafen skærer ikke x-aksen så der er ingen rødder, altså er d negativ.

420

Opgaveformulering

En parabel er graf for funktionen

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 21.$$

Parablen har toppunkt i punktet $T(5,-4)$, og den skærer førsteaksen i punkterne A og B. Det oplyses, at $A(3,0)$.

Bestem koordinatsættet til B, og bestem tallene a og b.

Besvarelse

En parabel er symmetrisk om toppunktet, så rodden i B ligger lige så langt til højre for toppunkets x-koordinat, som A ligger til venstre. B må altså ligge i (0,7). (Da (5-3) + 5 = 7.)

x- koordinaten til toppunktet er -b/2a. Så i dette tilfælde har vi -b/2a = 5 ⇔b = -10a.

Forskriften kan ved at indsætte b=-10a også skrives : $f(x) = ax^2 - 10ax + 21$:

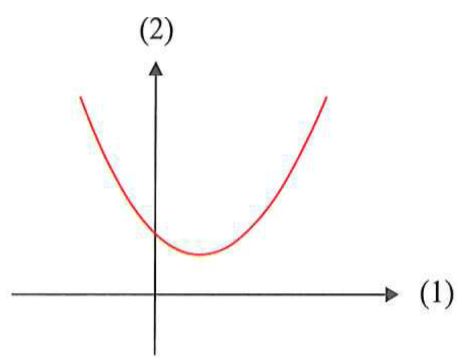
Vi ved at x-koordinaten til toppunktet indsat skal give y-koordinaten, så det indsætter vi og løser ligningen:

$$a \cdot 5^2 - 10\,a \cdot 5 + 21 = -4 \Leftrightarrow 25\,a - 50\,a + 21 = -4 \Leftrightarrow 25 = 25\,a \Leftrightarrow a = 1$$

b kan nu bestemmes da vi ved at b = -10a = -10*1, b er -10.

431

Opgaveformulering



På figuren ses en parabel med ligningen

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Benyt grafen til at begrunde fortegnene for a, b og c samt fortegnet for diskriminanten d.

Besvarelse

Grenene vender opad altså er a positiv.

Grafen skærer y-aksen over x-aksen dvs i en positiv værdi så c er positiv.

Hældningen af tangenten i skæringen med y-aksen er negativ så b er negativ.
(Man kan ogås begrunde det med at toppunktet ligger til højre for x-aksen så a og b har modsat fortegn)

Grafen skærer ikke x-aksen så der er ingen rødder, altså er d negativ.

449

Opgaveformulering

Angiv en mulig ligning for en parabel, der har toppunkt i punktet $P(4,3)$.

Besvarelse

x- koordinaten til toppunktet er -b/2a. Så i dette tilfælde har vi -b/2a = 4 ⇔b = -8a.

Jeg vælger a til 1, så b er -8. En mulig ligning er så på formen: $y = x^2 - 8\,x + c$: .

Jeg ved at 4 indsat skal give 3, så det indsætter jeg og løser ligningen:

$3 = 4^2 - 8\cdot 4 + c \Leftrightarrow 3 = 16 - 32 + c \Leftrightarrow c = 19$.

Så en mulig ligning er altså : $y = x^2 - 8\,x + 19$: .

#3.mw

53

Opgaveformulering

En ret linje l går gennem punkterne $P(1,-6)$ og $Q(-2,3)$.

Bestem en ligning for l, og bestem koordinatsættet til hvert af linjens skæringspunkter med akserne.

Besvarelse

Det ses af koordinaterne at når x falder med 3 stiger y med 9. Dvs a=-3/9=-3.
b kan findes ved: b = y1 - ax1 = -6 - (-3)*1= -3.

Dvs ligningen for l er y=-3x-3.

Dvs linjen skærer y-aksen i punktet (0,-3).

Når y = 0 er vi på x- aksen, så jeg løser: -3x-3=0 ⇔x=-1

Dvs linjen skærer x-aksen i punktet (-1,0).

73

Opgaveformulering

Der løber vand ud af en beholder, således at vandmængden i beholderen som funktion af tiden er givet ved

$$m(t) = -3t + 85\ ,$$

hvor $m(t)$ er vandmængden i beholderen (målt i liter) til tidspunktet t (målt i minutter).

Gør rede for, hvad tallene i forskriften fortæller om vandmængden i beholderen.

Besvarelse

tallet 85 fortæller at der er 85 liter i beholderen til t=0.

tallet -3 fortæller at mængden af vand i beholderen falder med 3 liter per minut.

89

Opgaveformulering

Om en eksponentielt voksende funktion f oplyses, at $f(4) = 3$ og $f(6) = 27$.

Bestem forskriften for f.

Besvarelse

Vi ved om en eksponentiel funktion at når x øges med 1 bliver y ganget med a.
Det ses af koordinaterne, at når x øges med 2 (fra 4 til 6) er y blevet ganget med 27/3 = 9.
Dvs a må være 3, da 3^2=9.

Når man går til venstre skal y divideres med a for hvert skridt.
Fra x=4 er der 4 skridt til venstre. For at nå x=0 skal der dividere 4 fire gange med a som her er 9.
Dvs når x er 0 (og vi er på y-aksen) er y = 3/(3^4) = 1/27.

Så forskriften er $\frac{1}{27}3^x$:

123

Opgaveformulering

Funktionen $f(x) = b \cdot x^a$ opfylder, at grafen for f går gennem punkterne $P(2,1)$ og $Q(6,27)$.

Bestem tallene a og b.

Besvarelse

Vi ser at det drejer sig om en potensfunktion. Så ved vi at når x ganges med en konstant kx, så ganges y med konstanten ky = kx^a.

Fra P til Q ganges x med 6/2=3, så kx er 3.
Fra P til Q ganges y med 27/1=27, så ky er 27.

Indsætter v i ligningen ky = kx^a fås: 27 = 3^a. Vi ser at det stemmer for a = 3.
b kan bestemmes ved b = y1/x1^a = 1/2^3 = 1/8. Dvs b = 1/8 = 0,125.

Forskriften er så $\frac{1}{8} \cdot x^3$:

169

Opgaveformulering

I en population af bananfluer kan udviklingen i antal fluer beskrives ved modellen

$$N(t) = 23 \cdot 1{,}386^t ,$$

hvor $N(t)$ betegner antal fluer til tidspunktet t (målt i døgn).

Gør rede for, hvad konstanterne i modellen fortæller om udviklingen i antal fluer i populationen.

Besvarelse

23 er antallet af bananfluer til tidspunktet t=0.
1,386 er den faktor antallet af fluer øges med per døgn.
Antallet vokser med 38,6% i døgnet. (ifølge modellen)

182

Opgaveformulering

Ved levering af grus fra et bestemt byggemarked betaler kunderne 499 kr. pr. m^3 grus samt et fast beløb på 250 kr. for selve transporten.

Indfør passende variable, og opstil et udtryk, der beskriver prisen på levering af grus som funktion af det antal m^3 grus, der skal leveres.

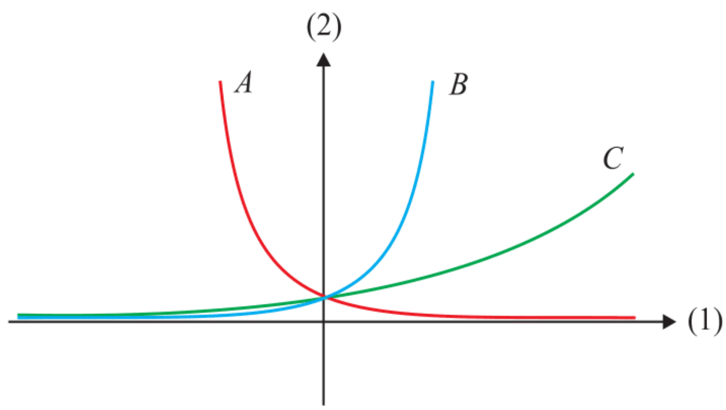
Besvarelse

x står for antallet af m^3 grus
y=p(x) står for den samlede pris på den leverede grusmængde i kr.

så forskriften bliver : p(x) = 499*x + 250

184

Opgaveformulering



Figuren viser graferne for funktionerne $f(x)=2^x$, $g(x)=0{,}5^x$ og $h(x)=1{,}2^x$.

Gør rede for hvilken graf, der hører til hvilken funktion.

Besvarelse

Grafen for A er faldende så a i forskriften f(x)=b*a^x er mindre end 1. Dvs A er grafen for g (x).

Graferne for B og C er begge stigende, men B stiger hurtigere end C så a er større i forskriften for B end a er i forskriften for C.
Dvs B er grafen for f(x) og C er grafen for h(x).

197

Opgaveformulering

I en model antages det, at udviklingen i den gennemsnitlige årlige mælkeydelse pr. ko i Danmark i perioden 1975-2008 kan beskrives ved en funktion af typen

$$m(t) = 124t + 4783,$$

hvor $m(t)$ betegner den gennemsnitlige årlige mælkeydelse pr. ko (målt i kg) i Danmark t år efter 1975.

Gør rede for, hvad konstanterne i modellen fortæller om udviklingen i den gennemsnitlige årlige mælkeydelse pr. ko i Danmark i perioden 1975-2008.

Besvarelse

4783 er den gennemsnitlige årlige mælkeydelse per ko i 1975.
124 fortæller at den gennemsnitlige årlige mælkeydelse per ko stiger med 124 kg om året.

212

Opgaveformulering

Funktionen $f(x) = b \cdot a^x$ opfylder, at $f(3) = 1$ og $f(6) = 8$.

Bestem tallene a og b.

Besvarelse

Vi ved om en eksponentiel funktion at når x øges med 1 bliver y ganget med a.
Det ses af koordinaterne, at når x øges med 3 (fra 3 til 6) er y blevet ganget med 8/1 = 8.
Dvs a må være 2, da 2^3=8.

Når man går til venstre skal y divideres med a for hvert skridt.
Fra x=3 er der 3 skridt til venstre. For at nå x=0 skal der dividere 3 fire gange med a som her er 8.
Dvs når x er 0 (og vi er på y-aksen) er y = 1/(2^3) = 1/8.

Vi har altså a=2 og b=1/8=0,125.

Forskriften er så $\frac{1}{8}2^x$:

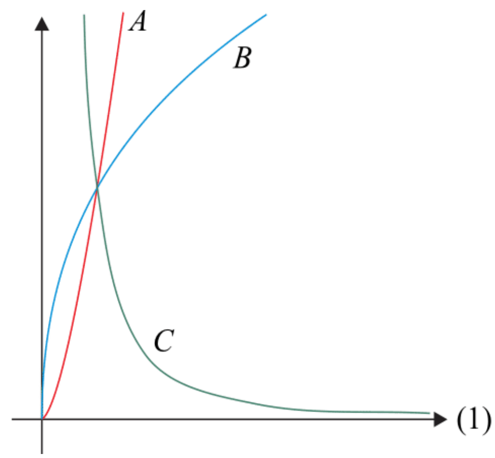
242

Opgaveformulering

På figuren ses en skitse af graferne for de tre potensfunktioner:

$$f(x) = 4x^{-2}$$
$$g(x) = 4x^{1,5}$$
$$h(x) = 4x^{0,4}$$

Angiv for hver af graferne *A*, *B* og *C*, hvilken af funktionerne *f*, *g* og *h* den hører til. Begrund svaret.



Besvarelse

Grafen for C er faldende så eksponenten er negativ. Dvs forskriften for C er f(x).
Grafen for A krummer opad så eksponenten er større end 1. Dvs forskriften for A er g(x).
Grafen for B krummer nedad så eksponenten er mindre end 1. Dvs forskriften for B er h(x).

252

Opgaveformulering

I 2004 var det samlede elforbrug til fjernsyn i Danmark 765 GWh. I perioden 2004 – 2010 voksede elforbruget til fjernsyn i Danmark med 82 GWh pr. år.

Indfør passende variable, og opstil en model, der beskriver udviklingen i elforbruget til fjernsyn i Danmark for perioden 2004 – 2010 .

Besvarelse

t er tiden målt i år efter 2004.
y=f(t) er det samlede elforbrug til fjernsyn det givne år målt i GWh.

Forskriften er dermed: $f(x) = 82 \cdot t + 765$:

#4.mw
Der bruges amerikansk/britisk komma/punktum i Maple-matematikdelen, ellers kontinentaleuropæisk.
Besvarelsen er lavet i Maple 18 med disse tilføjelser:
$with(Gym)$:

25

Opgaveformulering

I forbindelse med optagelse på College i USA skal der aflægges en særlig test. Resultatet af testen angives ved et testtal. Følgende tabel angiver testtallene i matematik for nogle udvalgte år:

år	1963	1967	1970	1974	1977
Testtal	502	492	488	480	470

Sammenhængen mellem testtallene og antal år efter 1963 kan med god tilnærmelse beskrives ved en lineær funktion f.

a) Bestem en forskrift for f.

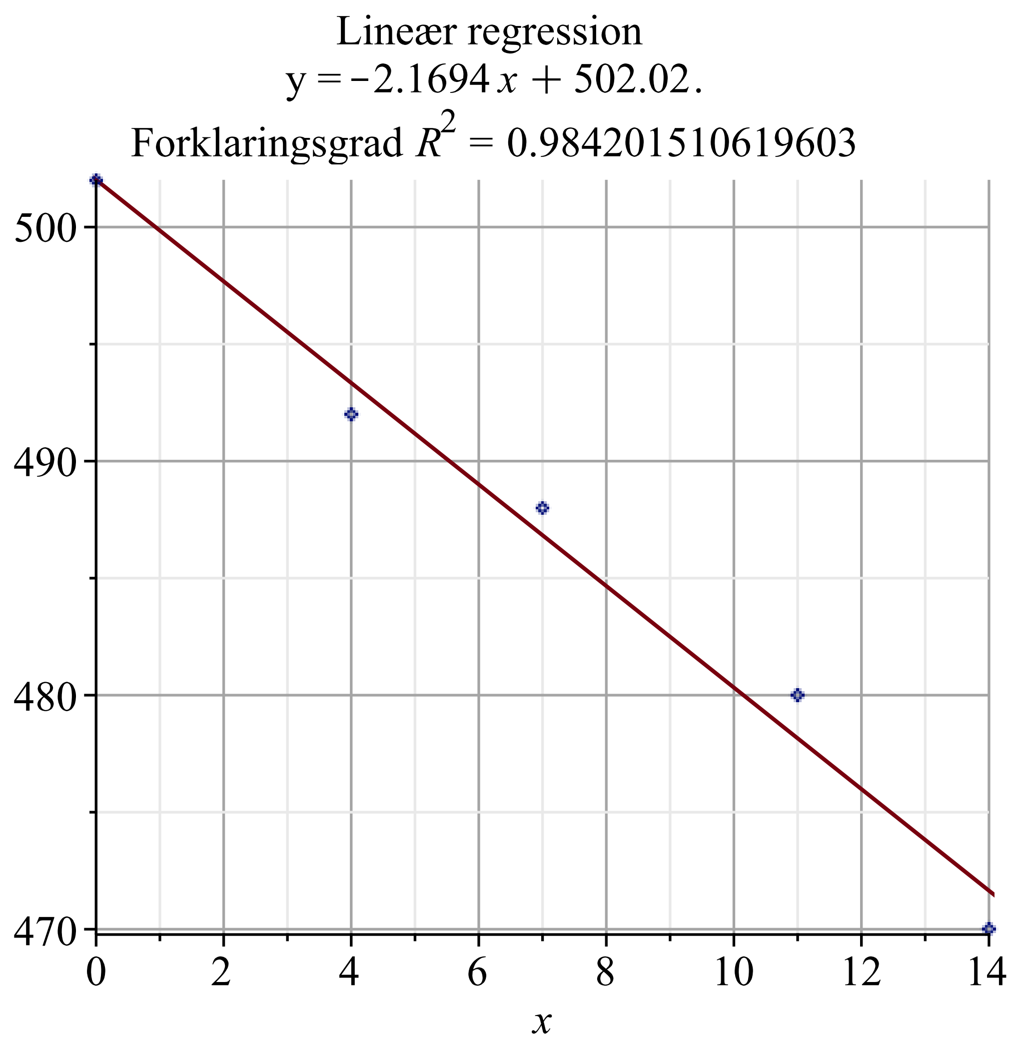
I 1980 var testtallet i matematik 466.

b) Forklar, hvad de tal, der indgår i forskriften for f, fortæller om udviklingen af testtallene, og kommentér, hvor godt det faktiske testtal i 1980 stemmer overens med det testtal, som kan beregnes ved hjælp af funktionen f.

Besvarelse

Værdierne indtastes, og Maple giver med linær regression både den bedste funktion og grafen:

$LinReg([0, 4, 7, 11, 14], [502, 492, 488, 480, 470])$



Forskriften er dermed $f(x) := -2.1694\,x + 502.02$:

Ifølge modellen var testallet i 1963 502, og testallet er efterfølgende faldet med 2,1694 per år.

Testallet i 1980 ifølge modellen er: $f(1980 - 1963) = 465.1402$

Da det viser sig at det aktuelle testalt i 1980 er 466 rammer modellen tæt på. Afvigelsen er ca. 0,2 %, som er beskeden sammenlignet med variationen i hele perioden som er ca 6%.

26

Opgaveformulering

I nedenstående tabel ses bruttonationalproduktet pr. indbygger i USA og Kina for året 2003. Endvidere ses den årlige vækstrate i bruttonationalproduktet pr. indbygger for årene 1990-2003 i de to lande.

	Bruttonationalproduktet pr. indbygger i 2003 (US$)	Årlig vækstrate 1990-2003
USA	37562	2,1%
Kina	5003	8,5%

I det følgende forudsættes, at bruttonationalproduktet pr. indbygger i de to lande vil vokse med uændret årlig vækstrate efter 2003.

a) Bestem, hvad bruttonationalproduktet pr. indbygger vil være i Kina i år 2020.

b) Bestem, hvornår de to lande vil have samme bruttonationalprodukt pr. indbygger.

Besvarelse

Da der er faste vækstrater er de to funktioner der beskriver natioanproduktet over tid, eksponetielle vækstfunktioner.

For USA er den $f(t) := 37562 \cdot 1.021^t = t \rightarrow 37562\ 1.021^t$

For Kina er den $g(t) := 5003 \cdot 1.085^t = t \rightarrow 5003\ 1.085^t$

hvor tiden t måles med udgangspunkt i 2003.

Det forventede bruttonationalprodukt i Kina i 2020 vil være: $g(2020 - 2003) = 20023.31834$

Det år hvor de to lande har samme n.produkt findes ved at løse ligningen:

$f(t) = g(t) \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 33.15854927]]$ Dvs. ca 33 år efter 2003 altså i 2036.

44

Opgaveformulering

I 2005 var bevillingerne til forskning og uddannelse i et bestemt land 20 mia. kr. Det bliver besluttet, at disse bevillinger skal stige med en fast årlig procent, så de i 2020 når op på 60 mia. kr.

a) Bestem den årlige procentvise stigning i bevillingerne.

Besvarelse

Af teksten fremgår at bevillingerne ved eksponentiel vækst skal 3-dobles på 15 år.

Fremskrivningsfaktoren a, er dermed løsning til ligningen: $a^{15} = 3 \xrightarrow{\text{solve}} 1.075989625$

Den årlige %-vise stigning skal altså være (1,075989-1)*100% altså ca 7,6%.

63

Opgaveformulering

Sammenhængen mellem antal fuglearter og størrelsen af den sø, de lever ved, kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = b \cdot x^{0,25}, \quad 1000 \leq x \leq 64000,$$

hvor $f(x)$ er antallet af fuglearter ved søen, og x er søens overfladeareal (målt i m^2).

a) Bestem tallet b, når det oplyses, at der er 3 fuglearter ved en sø med overfladeareal 1650 m^2, og bestem overfladearealet af en sø med 6 fuglearter.

Om to søer S_1 og S_2 gælder, at $x_2 = 10 \cdot x_1$, hvor x_1 er overfladearealet af S_1, og x_2 er overfaldearealet af S_2. Endvidere gælder, at $f(x_2) = k \cdot f(x_1)$.

b) Bestem k, og beskriv, hvad dette tal fortæller om antallet af fuglearter ved de to søer.

Kilde: Kaj Sand-Jensen: Søer – en beskyttet naturtype, Gads Forlag, ISBN 87-12-03709-5.

Besvarelse

Ifølge oplysningerne under spm. a) er f(1650)=3.
Denne ligning løses mht b: $b \cdot 1650^{0.25} = 3 \xrightarrow{\text{solve}} 0.4707065793$
Dvs b er ca. 0,47 og forskriften er: $f(x) := 0.47071 \cdot x^{0.25}$:

Overfladeareladet ved 6 fuglearter fås ved løsning af: $f(x) = 6 \xrightarrow{\text{solve}} 26399.23259$
Dvs arealet er ca 26400kvm.

For et potensfunktion gælder at når x vokser med en fast faktor k_x vil f(x) vokse med en anden fast faktor k_y og der gælder $k_y = k_x a$: .
Teksen fortæller at Sø 2 er 10 gange større end sø 1, så K_x er 10. a er 0,25. Så k (der er den samme som k_y) er $10^{0.25} = 1.778279410$

Dvs antallet af arter i en sø er ca 1,78 gange større end i en søg der er 10 gange mindre.
Antallet af arter er dermed ca 78% højere.

77

Opgaveformulering

Verdens årlige IP-trafik måles i pentabytes. Tabellen viser verdens årlige IP-trafik for årene 2006-2008.

År	2006	2007	2008
IP-trafik	50808	78924	128964

I en model antages det, at den årlige IP-trafik P (målt i pentabytes) som funktion af tiden t (målt i år efter 2006) med tilnærmelse kan beskrives ved sammenhængen

$$P = P_0 \cdot a^t ,$$

hvor P_0 og a er tal.

a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene P_0 og a.

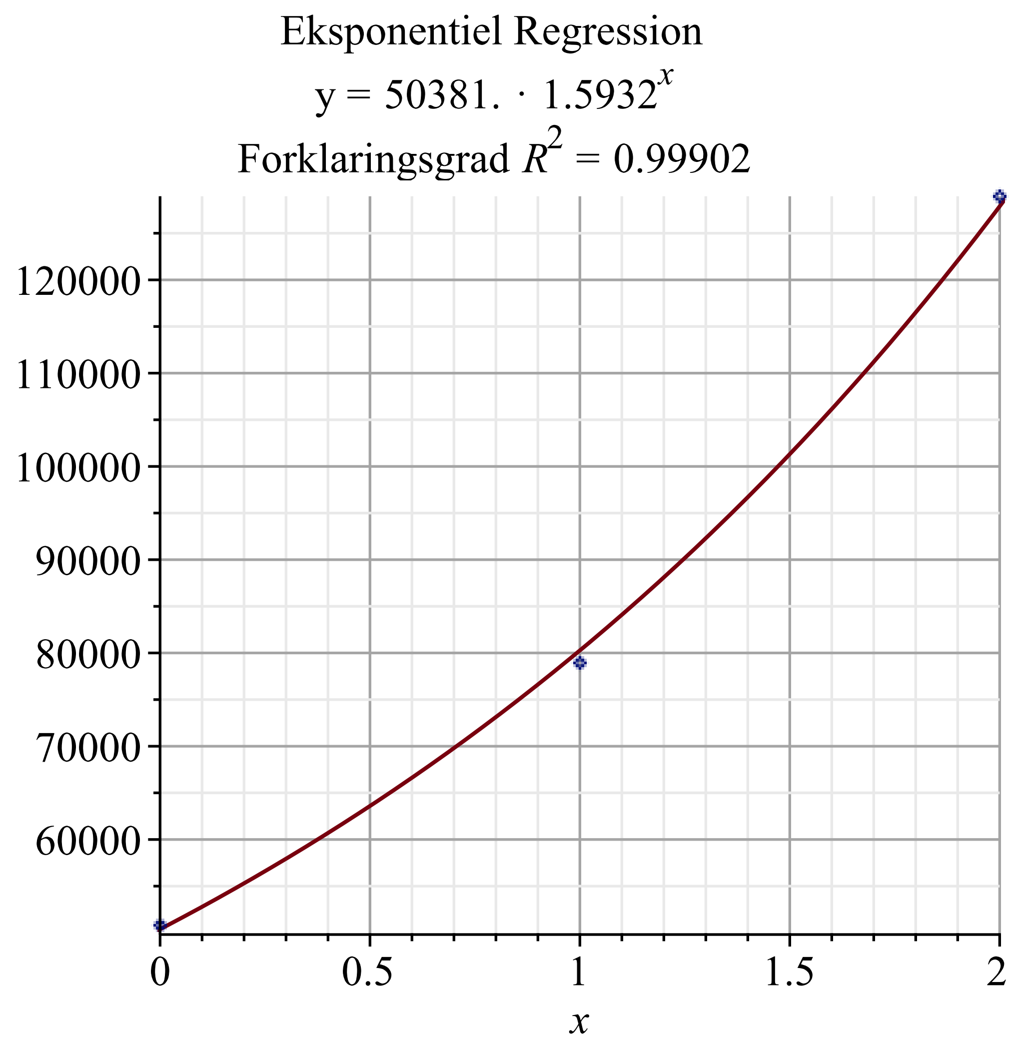
I 2006 udgjorde den private årlige IP-trafik 31692 pentabytes.

b) Opstil en funktion, der beskriver udviklingen i den private årlige IP-trafik efter 2006, når væksten pr. år er 49%, og bestem fordoblingstiden.

Besvarelse

Værdierne indtastes, og Maple giver med eksponentiel regression både den bedste funktion og grafen:

$ExpReg([0, 1, 2], [50808, 78924, 128964])$



Vi kan læse at forskriften er $P(t) = 50381 \cdot 1.5932^t$: og vi har: $P_0 = 50381$ og a=1,5932

En vækst på 49% giver en fremskrivningsfaktor a=1,49.
Så modellen for den private årlige trafik er $P(t) = 31692 \cdot 1.49^t$:

Fordoblingstiden er, jf. formel: $T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.49)} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} T2 = 1.7382$

Dvs fordoblingstiden er ca 1,74 År.

110

Opgaveformulering

Om en eksponentielt voksende funktion f oplyses, at

$$f(3)=864 \quad \text{og} \quad f(6)=1493 .$$

a) Bestem en forskrift for f .

b) Bestem fordoblingskonstanten for f.

Besvarelse

Denne opgave kan også hurtigt løses med regression, selv om der kun er 2 punkter. Vi ved så at regressionen vil matche de to værdier eksakt.Når der kun er to punkter kan vi imidlertid også vælge at bruge en formel.

Vi definerer først:

$x_1 := 3 :$

$x_2 := 6 :$

$y_1 := 864 :$

$y_2 := 1493 :$

a kan nu bestemmes ved: $a := \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$ $\frac{1}{864}\, 1493^{1/3}\, 864^{2/3} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 1.2000$

b kan bestemmes ved $\frac{y_1}{a^{x_1}}$ $\frac{746496}{1493} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 500.00$

Forskriften for f er altså: $f(x) = 500 \cdot 1.2^x$:

Fordoblingstiden er, jf. formel: $T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.2)} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} T2 = 3.8018$

Dvs fordoblingkonstanten er ca 3,8.

130

Opgaveformulering

Tabellen viser det årlige udslip af CO_2 for OECD-landene for en række år.

År	1990	1995	2000	2004	2005	2006	2007
CO_2 mio. ton	11073	11575	12492	12887	12922	12865	13000

I en model antages det, at det årlige udslip af CO_2 (målt i mio. ton) fra OECD-landene som funktion af antal år efter 1990 kan beskrives ved en lineær funktion $f(x)$.

a) Benyt tabellens data til at bestemme en forskrift for $f(x)$.

I perioden 1990-2007 er det årlige udslip af CO_2 fra Kina steget med 6,0 % pr. år. I 1990 var CO_2-udslippet fra Kina 2244 mio. ton. Funktionen $g(x)$ angiver det årlige CO_2-udslip fra Kina x år efter 1990.

b) Bestem en forskrift for $g(x)$, og benyt denne til at bestemme det årlige CO_2-udslip fra Kina i 2030.

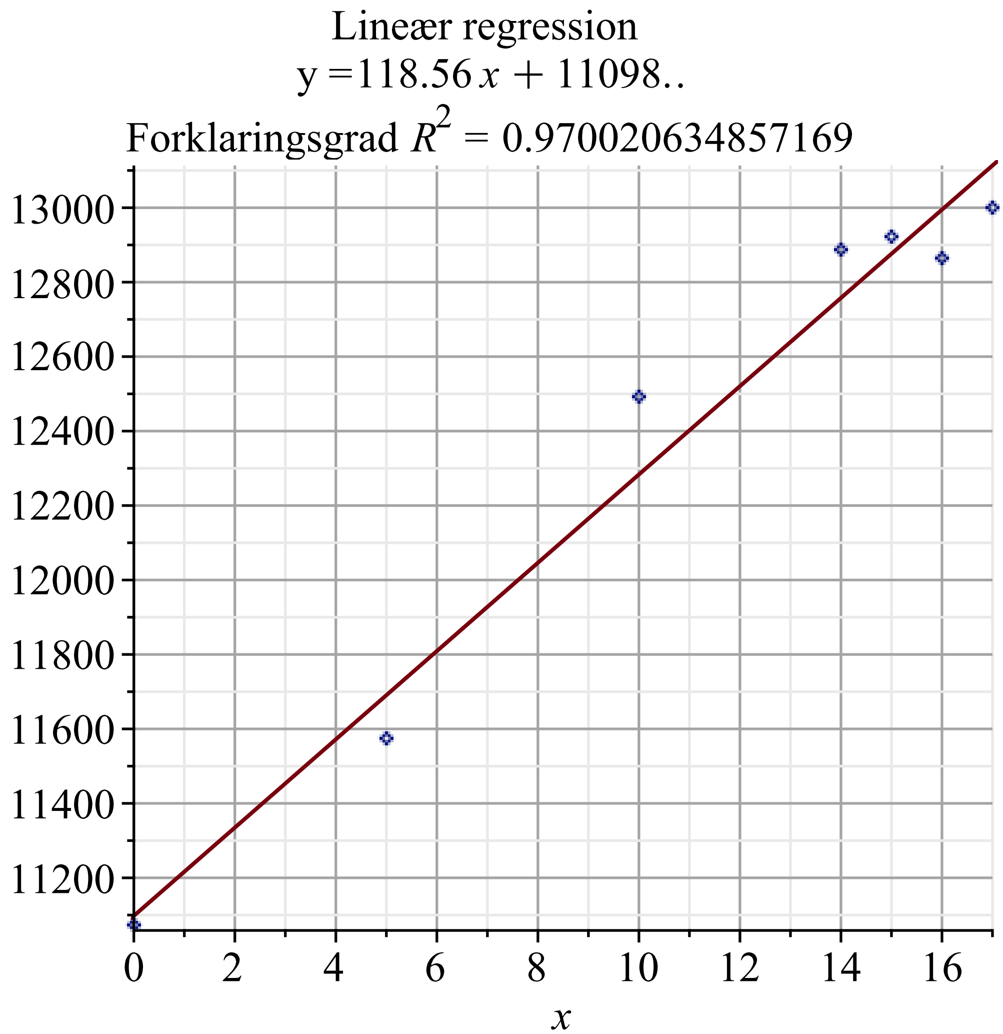
c) Benyt funktionerne $f(x)$ og $g(x)$ til at bestemme det årstal, hvor det årlige CO_2-udslip fra Kina overstiger det årlige CO_2-udslip fra OECD-landene.

Kilde : http://www.iea.org/co2highlights/co2highlights.pdf

Besvarelse

Værdierne indtastes, og Maple giver med linær regression både den bedste funktion og grafen:

$$LinReg([0, 5, 10, 14, 15, 16, 17], [11073, 11575, 12492, 12887, 12922, 12865, 13000])$$



Vi kan nu læse at frorskriften er $f(t) := 118.56\, t + 11098$:

En vækst på 6% giver en fremskrivningsfaktor a=1,06.
Så modellen for det årlige udslip fra Kina er $g(t) := 2244 \cdot 1.06^t$:

Ifølge modellen vil udslippet i 2030 være $g(2030 - 1990) = 23081.15106$ Dvs ca. 23081 mill. tons.

Vi løser : $f(t) = g(t) \xrightarrow{\text{solutions for t}} -93.52526468, 32.55546315$

Den første løsning er fortidig og kasseres, dvs Kina indhenter OECD i år (1990+32,5) i løbet af 2022

#5.mw

Der bruges amerikansk/britisk komma/punktum i Maple-matematikdelen, ellers kontinentaleuropæisk.
Besvarelsen er lavet i Maple 18 med disse tilføjelser:
$with(Student[Calculus1])$:
$with(Gym)$:

5

Opgaveformulering

Kilde: Acciona-energia

År	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Solenergi (MW)	7	11,7	15,6	22,6	32,8	49,4	68,9	116,4

Tabellen viser for hvert af årene 1999-2006 mængden af udvundet solenergi i Spanien. I en model antages det, at den udvundne solenergi P (målt i MW) som funktion af tiden t (målt i år efter 1999) med tilnærmelse kan beskrives ved sammenhængen

$$P = P_0 \cdot a^t ,$$

hvor P_0 og a er tal.

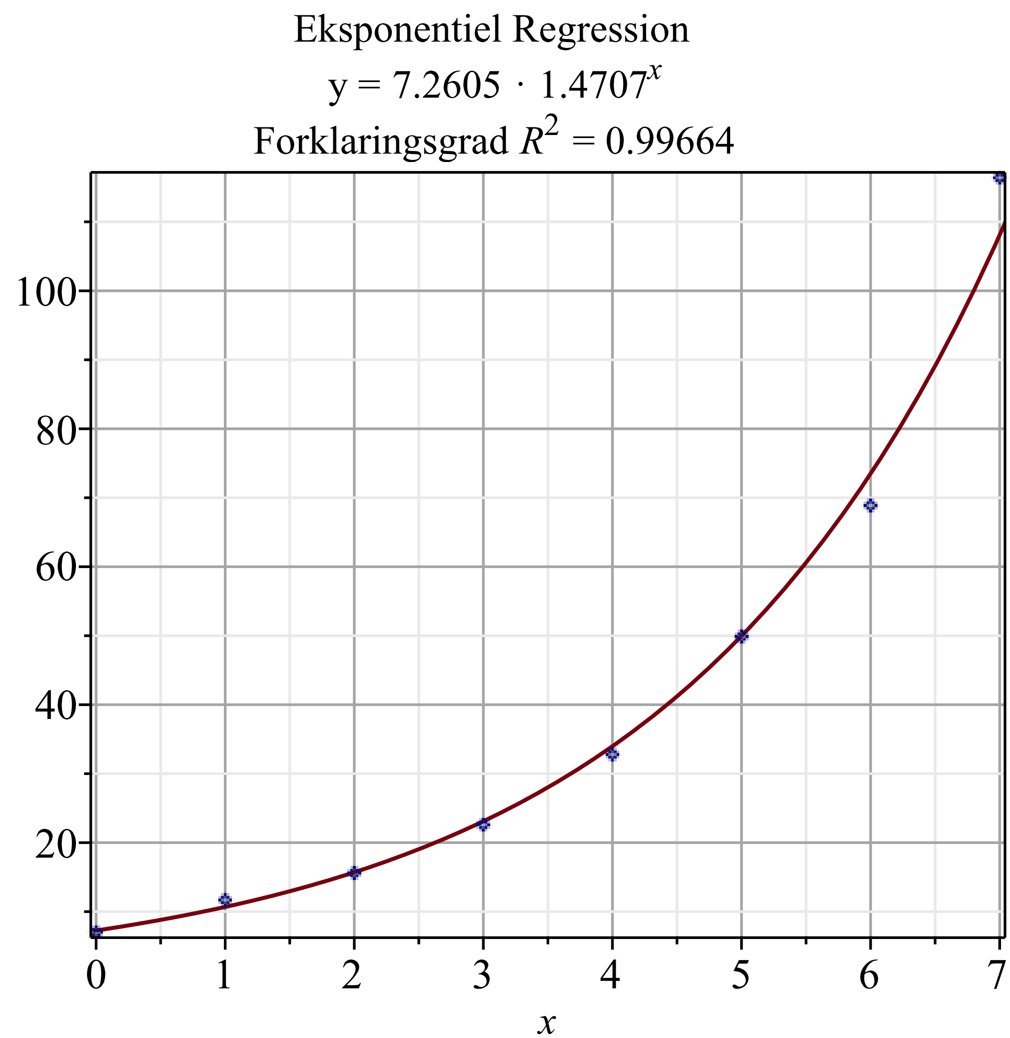
a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene P_0 og a.

b) Benyt modellen til at forudsige mængden af udvundet solenergi i Spanien i år 2008 samt til at forudsige, hvornår udvindingen af solenergi i Spanien overstiger 400 MW.

Besvarelse

Værdierne indtastes, og Maple giver med eksponentiel regression både den bedste funktion og grafen:

$ExpReg([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], [7, 11.7, 15.6, 22.6, 32.8, 49.9, 68.9, 116.4])$



Vi kan læse at forskriften er $P(t) := 7.2605 \cdot 1.4707^t$: og vi har: $P_0 = 7.2605$ og a=1,4707

Den forventede solenergi udvundet i 2008 er $P(2008 - 1999) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 233.71$ MW

Tidspunktet hvor mængden når 400MW bestemmes ved at løse: $P(t) = 400 \xrightarrow{\text{solve}}$
10.39309294

Dvs modellen forudsiger at det sker 10.4 år efter 1999 dvs i løbet af år 2009

19

Opgaveformulering

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 + e^x + 1.$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(0, f(0))$.

Besvarelse

$f(x) := x^3 + e^x + 1 :$

Man kan bruge Maples inbyggede funktion fra pakken Student[Calculus1]. Den er loadet i toppen.

$y = Tangent(f(x), x = 0) = y = x + 2$

Men opgaven er faktisk uden hjælpemidler. Manuelt må man først differentiere:

$f'(x) = 3x^2 + e^x :$

Tangentens hældning a, er den aflede i punktet x=0: $f'(0) = 3 \cdot 0^2 + e^0 = 1 :$

Herefter kan b bestemmes ved indsættelse i $y_1 - ax_1 : = f(0) - 1 \cdot 0 = 0^3 + e^0 + 1 = 2 :$

Nu kendes både a og b så tangentens ligning er $y = x + 2$.

37

Opgaveformulering

En funktion f er givet ved $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Bestem $f'(x)$, og bestem monotoniforholdene for f.

Besvarelse

$f(x) := x^3 - 3x^2 + 4 :$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

f'(x) er et andengradspolynomium, med positiv værdi af a, (koefficienten til andengradsleddet) så den har benene opad. Funktionen f er derfor voksende udenfor rødderne til f'(x) og aftagende mellem.

Vi vil derfor finde rødderne. Det ses at 3x kan sættes uden for en parentes. Så får vi f(x)=3x (x-2).

Heraf kan vi (via nulreglen) se at rødderne er 0 og 2.

f er altså aftagende i intervallet [0;2]

og voksende i intervallerne]∞;0] og [2;∞[

139

Opgaveformulering

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^4 + \ln(2x+1) .$$

Bestem $f'(1)$.

Besvarelse

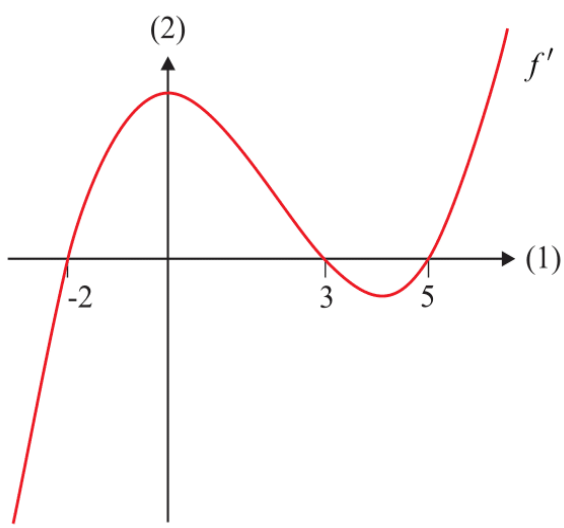
$f'(x) = 4x^3 + \dfrac{2}{2x+1}$:

$f'(1) = 4 \cdot 1^3 + \dfrac{2}{2 \cdot 1 + 1} = 4\dfrac{2}{3}$

172

Opgaveformulering

Figuren viser i intervallet $[-3; 6]$ grafen for den afledede funktion f' for en funktion f .



Bestem monotoniforholdene for funktionen f i intervallet $[-3; 6]$.

Besvarelse

Funktionen er voksende der hvor f'(x) er positiv, dvs der hvor grafen ovenfor ligger over x-aksen. Omvendt når den ligger under. Nulpunkterne for f'(x) aflæses til -2, 3 og 5. Dermed kan vi konkludere:

f(x) er voksende i intervallerne [2;3] og [5;6].
f(x) er aftagende i intervallerne [-3;-2] og [3;5].

196

Opgaveformulering

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x\ .$$

Bestem $f'(x)$.

Besvarelse

$f'(x) = 2 \cdot 3\, x^2 - 2\, x + 3 = 6\, x^2 - 2\, x + 3$

389

Opgaveformulering

En funktion f er givet ved

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 + x.$$

Bestem den værdi af x, hvor $f'(x)$ er maksimal.

Besvarelse

Først vinder vi den aflede funktion: $f'(x) = -3\, x^2 + 12\, x + 1$:

f'(x) er et andengradspolynomium med grenene opad da a er negativ.
Så det har sit maksimum i toppunktet med x-koordinat: $-\dfrac{b}{2\,a} = -\dfrac{12}{-2 \cdot 3} = 2$:

403

Opgaveformulering

En funktion f er givet ved forskriften

$$f(x) = 5e^x + 4 .$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

Besvarelse

Først må vi differentiere: $f'(x) = 5e^x$:

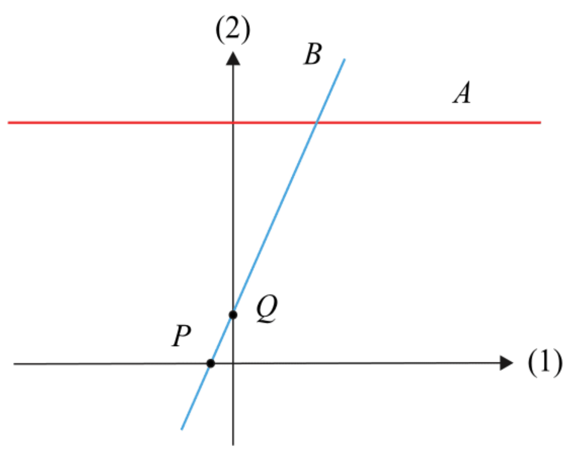
Tangentens hældning a, er den aflede i punktet x=0: $f'(0) = 5 \cdot e^0 = 5$:
Herefter kan b bestemmes ved indsættelse i $y_1 - ax_1$: $= f(0) - 5 \cdot 0 = 5e^0 + 4 = 9$

Nu kendes både a og b så tangentens ligning er $y = 5\,x + 9$.

405

Opgaveformulering

Figuren viser graferne for de afledede funktioner af funktionerne f og g.



A er grafen for den afledede funktion f' , som har forskriften $f'(x) = 5$. B er grafen for den afledede funktion g' , som er en lineær funktion.
Grafen for g' går igennem punkterne $P\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ og $Q\left(0, 1\right)$.

Bestem monotoniforholdene for funktionen g, og bestem førstekoordinaten til det punkt R, hvor tangenthældningen til grafen for f er den samme som tangenthældningen til grafen for g.

Besvarelse

g'(x) er linær med nulpunkt i x=-½ og den er positiv til højre for roden.
Så g(x) må aftagende i intervallet]∞;-½]
og voksende i intervallet [-½;∞[

Tangenthældningerne for f og g er identiske der hvor de aflede funktioner har samme værdi. Vi skal altså finde ud af hvor grafen for f' skærer grafen for g'.

g' har hældningen 2 (P-->Q en halv til højre svarer til en opad). Øger vi yderligere x med 2 øges y med 4 og så er vi netop nået op til y=5 som er ligningen for f'.

Så førstekoordinaten til R er 2.

464

Opgaveformulering

Tegn en mulig graf for en differentiabel funktion f, der opfylder, at

$$f(0) = 2 \text{ og } f(12) = 1,$$

samt at fortegn og nulpunkter for f' er som angivet på tallinjen:

x		5		10	
$f'(x)$	+	0	−	0	+

Besvarelse

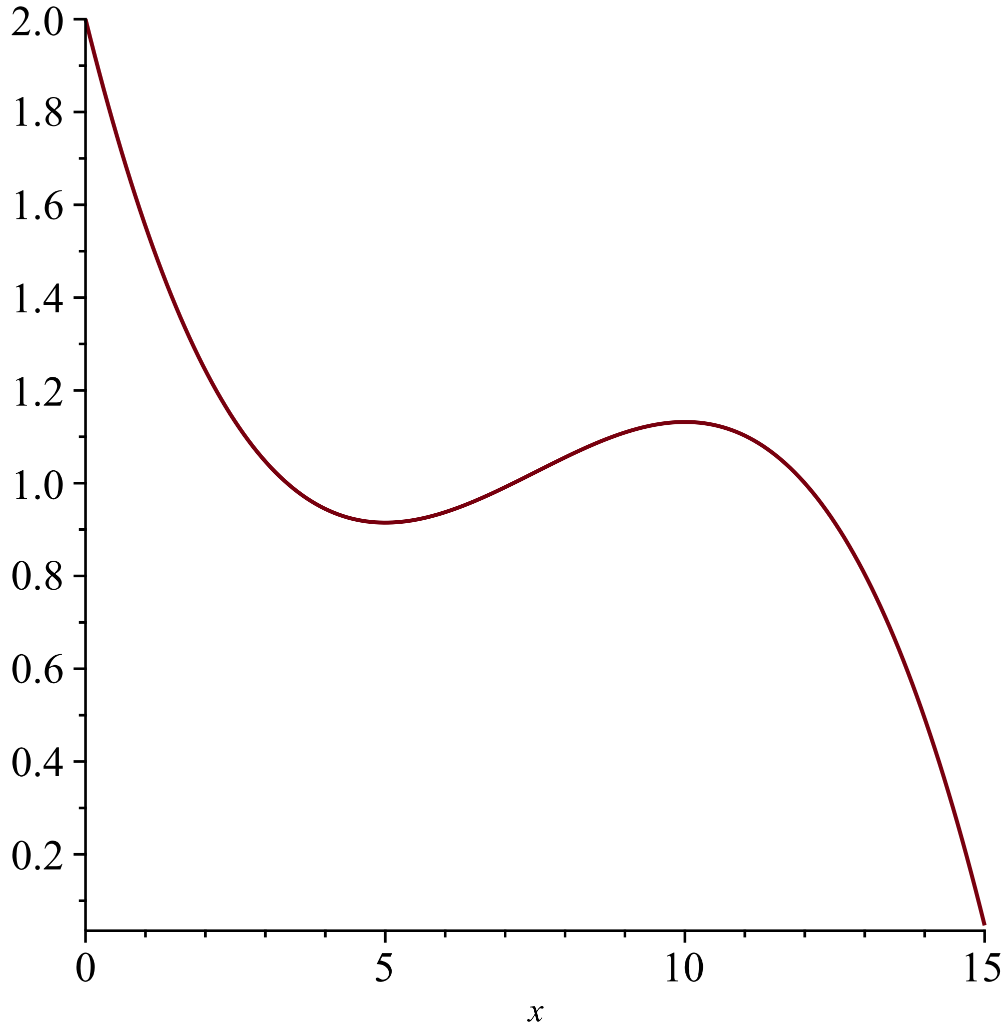
Der er mange løsninger men den angivne fortegnsvariation for f' stemmer med en parabel med nulpunkter i 5 og 10 og grenene opad.
Funktionen f selv må så være et 3.gradspolynomium med lokalt maksimum i x=5 og lokalt minimu i x=10.
Dette er tilstrækkeligt til at kunne skitsere det, hvis vi begynder med at afmærke de to angivne punkter.
....
Opgaven er egentlig uden hjælpemidler, men da denne vejledende besvarelser er lavet i Maple, kan vi benytte Maple til at få lavet en pæn graf ved at beregne forskriften for 3 gradspolynomiumet.

Nulreglen fortæller os at f' kan skrives: $f'(x) = a(x-5)\cdot(x-10) = a\left(x^2 - 15x + 50\right)$:
Funktionen f selv må så være et 3 gradspol på formen: $f(x) = a\left(\frac{1}{3}x^3 - 7.5x^2 + 50x\right) + d$:
d er en vilkårlig integrationskonstant. Da f(0)=2 er d=2.

a kan bestemmes via det andet punkt da 12 indsat i f(x) skal give 1.

$$a\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 12^3 - 7.5\cdot 12^2 + 50\cdot 12\right) + 2 = 1 \xrightarrow{\text{solve for a}} [[a = -0.01041666667]]$$

Nu kan vi plotte grafen: $plot\left(-0.01041666667\left(\frac{1}{3}x^3 - 7.5\,x^2 + 50\,x\right) + 2, x = 0..15\right)$



Ovenstående er altså en mulig graf. Skal det være et 3.gradspol er der kun denne, men det kunne være alt muligt andet, man kan skitsere med løs hånd.

490

Opgaveformulering

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x) + 5x^4 + 1, \quad x > 0.$$

Bestem $f'(1)$.

Besvarelse

Vi bestemmer først den aflede funktion

$f'(x) = 2\,x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} + 4 \cdot 5\,x^3 = 20\,x^3 + x + 2\,x \cdot \ln(x)$:

Nu kan vi indsætte $f'(1) = 20 \cdot 1^3 + 1 + 2 \cdot 1 \cdot \ln(1) = 20 + 1 + 2 \cdot 0 = 21$:

#6.mw

1. del *uden* hjælpemilder. Må skrives i Maple, men skal regnes manuelt.

601

Opgaveformulering

a) Reducér udtrykket $2q \cdot (p+q) - p \cdot (2q+p)$.

Besvarelse

$2\,q \cdot (p+q) - p \cdot (2\,q+p) = 2qp + 2\,q^2 - 2pq - p^2 = 2\,q^2 - p^2$

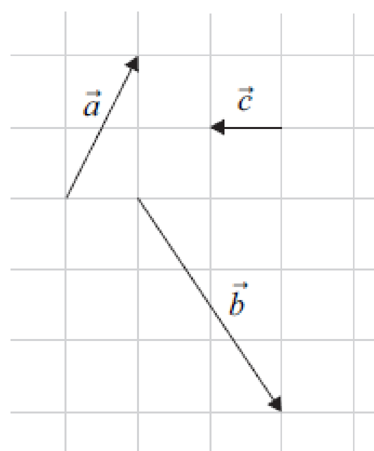
602

Opgaveformulering

På figuren ses repræsentanter for tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.

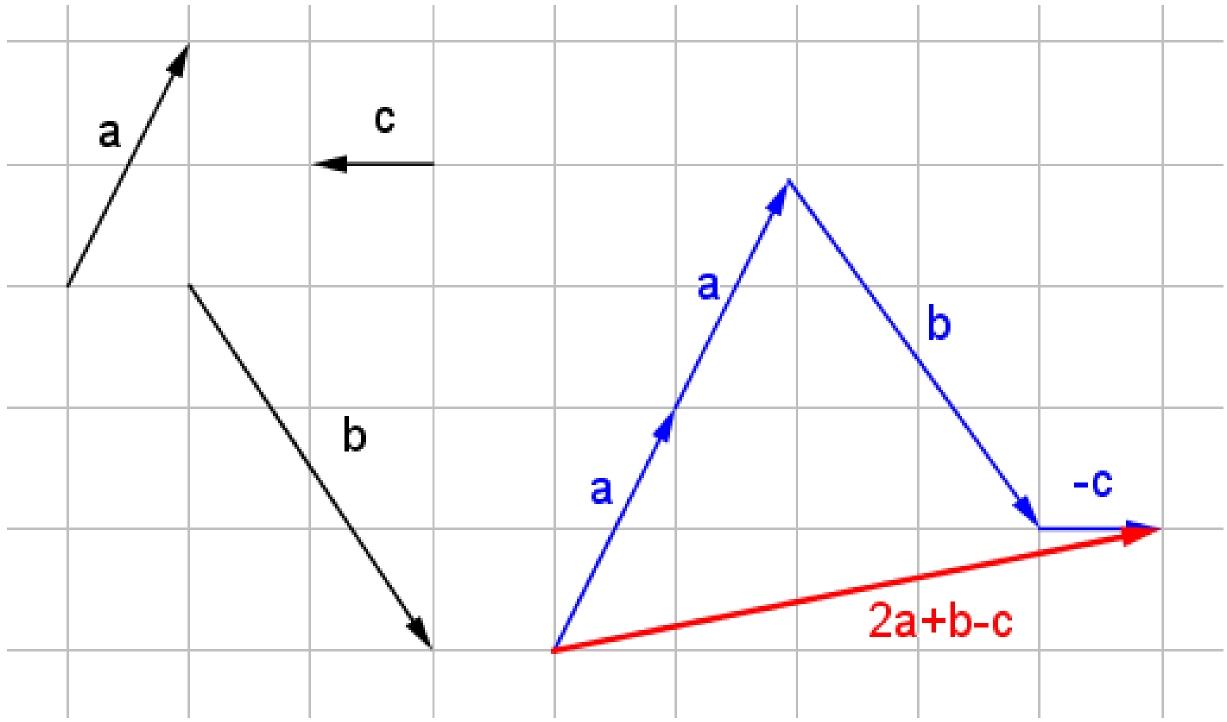
a) Tegn en repræsentant for vektor $2 \cdot \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Benyt eventuelt vedlagte bilag.



Besvarelse

Vektorerne lægges i forlængelse af hinanden med start et vilkårligt sted.
Da vektor c skal trækkes fra tegnes den i modsat retning.
Summen er da vektoren fra start- til slutpunkt vist med rødt.



603

Opgaveformulering

To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = x^3 \quad \text{og} \quad g(x) = 3x - 1.$$

a) Bestem $f(g(1))$.

Besvarelse

$f(g(1)) = f(3 \cdot 1 - 1) = f(2) = 2^3 = 8$

604

Opgaveformulering

a) Løs andengradsligningen $x^2 - 4x - 60 = 0$.

Besvarelse

Da dette er en ogave uden hjælpemidler regner jeg med at løsningerne er heltal. Jeg forsøger mig derfor med gættereglen:
'Når a er 1, er produktet af rødderne c=-60 og deres sum er -b=-(-4)=4.

60 kan skrives som et produkt af heltal på et begrænset antal måder fx 6*10.
Jeg ser så at det stemmer, når den ene rod 10 og den anden er -6.
(10*(-6) er -60 og 10-6 er 4)

605

Opgaveformulering

En stokastisk variabel X er binomialfordelt, $X \sim b(100, 0.5)$.

a) Bestem middelværdien for X.

b) Undersøg, om 39 er et exceptionelt udfald for X.

Besvarelse **(Løses ved hjælp af formelsamling side 41+42.)**

Middelværdien er $n \cdot p = 100 \cdot 0.5 = 50$.
Spredningen for en binomialfordeling er $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)} = \sqrt{25} = 5$

Et ekceptionelt udfald er et der ligger mere end 3 spredninger fra middelværdien.
Det gør 39 ikke, da ligger tættere på 50 end 15.

Så 39 er *ikke* et exceptionelt udfald.

606

Opgaveformulering

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 15.$$

Grafen for f er en parabel.

a) Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.

Besvarelse

1. koordinat til toppunktet er: $-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\cdot 3} = 1$

$f(1) = 3\cdot 1^2 - 6\cdot 1 + 15 = 12$

Toppunktets koordinater er altså: (1,12).

607

Opgaveformulering

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^{2x-1}.$$

a) Bestem $f'(\frac{1}{2})$.

Besvarelse

f'(x) findes via reglen om den afledede af en sammensat funktion: $f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Her fås: $(e^{2x-1})' = e^{2x-1}\cdot(2x-1)' = 2e^{2x-1}$

f'(½) findes ved indsættelse: $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{2\cdot\frac{1}{2}-1} = 2e^0 = 2$

608

Opgaveformulering

En cirkel er bestemt ved ligningen

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y = 15.$$

a) Bestem cirklens radius og koordinatsættet til cirklens centrum.

Besvarelse

Ligningen omskrives til standardformen:

$x^2 + 2x + y^2 - 6y = 15 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 = 15 \Leftrightarrow$
$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$

Nu kan vi aflæse at radius er 5 og centrum er (-1,3).

609

Opgaveformulering

En funktion f opfylder, at

$$f(0) = 5 \text{ og } f(10) = -1 .$$

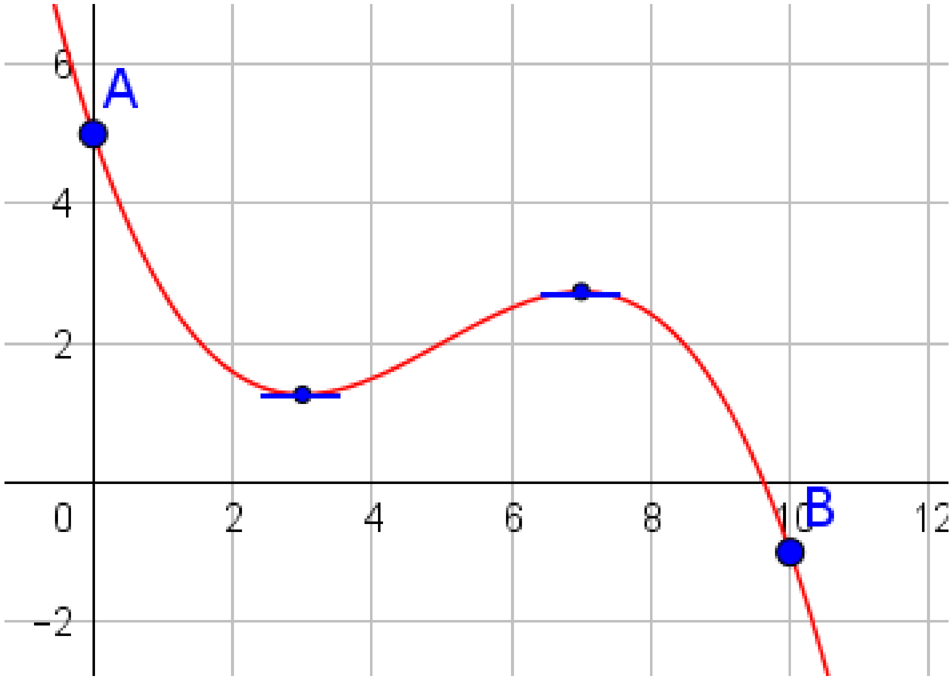
Fortegn og nulpunkter for $f'(x)$ er som angivet på tallinjen.

x		3		7	
$f'(x)$	-	0	+	0	-

a) Tegn en mulig graf for f.

Besvarelse

De to punkter afmærkes først. Herefter kan vi på fortegnslinjen for f'(x) se at grafen for x er aftagende før 3, voksende frem til 7 og herefter aftagende igen. Så vi tegner med frihånd noget der stemmer med det.



De små vandrette linjestykker (linjeelementer) viser at der skal være vandrette tangenter i x=3 og x=7 hvor f'(x) skifter fortegn.

NOTE
Det viser sig at funktionen:

$$f(x) := \frac{-9 \cdot \left(\frac{1}{3}\,x^3 - 5\,x^2 + 21\,x\right)}{65} + 5$$

lever op til kravene, så den har jeg tegnet i Geogebra.
Men den forskrift går opgaven slet ikke ud på at finde. Det er kun gjort fordi det her er en vejledende løsning, så jeg ville gerne have en pæn figur.

2. del *med* hjælpemidler

with(*Gym*) :
with(*RealDomain*) :

610

Opgaveformulering

En funktion f er givet ved

$$f(x)=\begin{cases}0{,}5x^2-2x+3, & 0\le x\le 4\\ x-1, & 4<x\end{cases}$$

a) Tegn grafen for f.

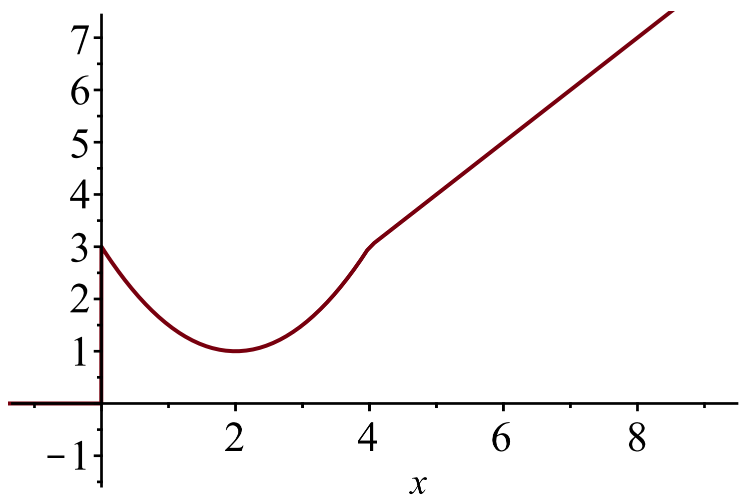
b) Løs ligningen $f(x)=5$.

Besvarelse

Jeg definerer først gaffel-forskriften via elementent til formålet i palleten 'Expression' :

$$f(x) := \begin{cases} 0.5\,x^2-2\,x+3 & 0<x<4 \\ x-1 & x\ge 4\end{cases} \quad : =$$

$plot(f(x))$



Løsningen til ligningen er: $f(x)=5 \xrightarrow{\text{solve}} \{x=6.\}$

611

Opgaveformulering

Foto: www.colourbox.dk

På en bestemt ø har man hvert år i en årrække udtaget en stikprøve blandt de lam, der skulle slagtes, og målt den gennemsnitlige slagtevægt for disse.

År	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Gennemsnitlig slagtevægt (kg)	41,0	41,4	42,2	42,7	42,4	44,2	44,4	45,7	46,0

I en model kan udviklingen beskrives ved en lineær funktion

$$f(x) = a \cdot x + b\,,$$

hvor $f(x)$ betegner lammenes gennemsnitlige slagtevægt (målt i kg) til tidspunktet x (målt i år).

a) Bestem tallene a og b ved regression.

b) Tegn residualplottet.

c) Benyt residualplottet og residualspredningen til at vurdere den lineære models anvendelighed til at beskrive udviklingen.

Besvarelse

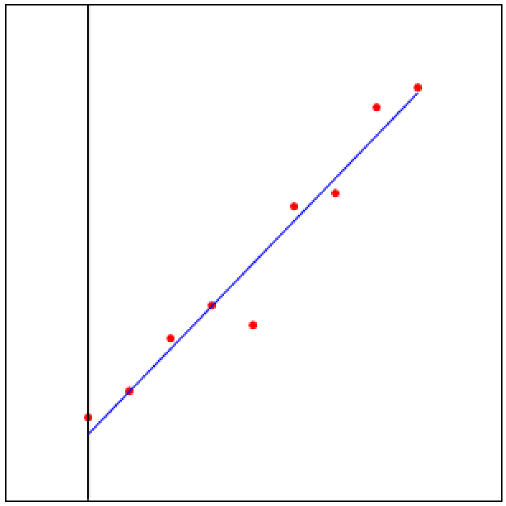
Jeg har brugt min egen app. Herunder ses skærmklip af resultatet.

sheet1.xml

	A	B
0	0	41
1	1	41.4
2	2	42.2
3	3	42.7
4	4	42.4
5	5	44.2
6	6	44.4
7	7	45.7
8	8	46

LINEÆR REGRESSION f(x)=ax+b

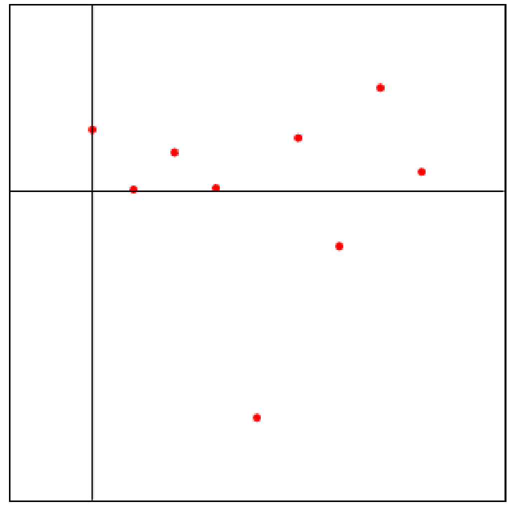
PUNKTPLOT



$f(x)=6.4667\cdot10^{-1}\cdot x+40.7467$

Determinationskoefficienten R2: $9.5257\cdot10^{-1}$

RISIDUALPLOT



Konfidensinterval for hældning a:
$[5.4334\cdot10^{-1}; 7.5\cdot10^{-1}]$

Risdualspredning σ: $4.2246\cdot10^{-1}$

På det kan vi læse at a er 0,6467 b er 40,75.

Residualplottet er grafen til højre.

Risidualspredningen aflæses til at være 0,422. Sammenlignes den med værdierne for lammenes vægt på ca 42, udgør den kun lidt over 1 %. Sammenlignes i stedet med variationsbredden for lammenes vægt (størsteværdi minus mindsteværdi =5kg) udgør den ca 8 %.

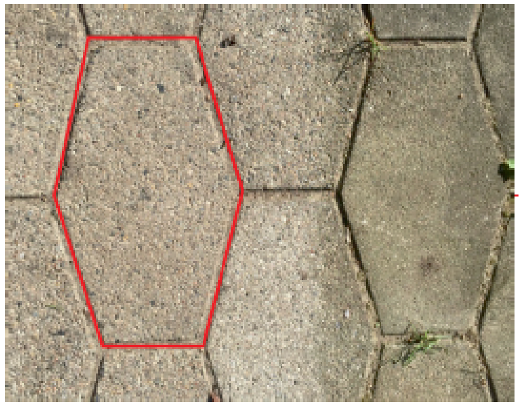
Det der ellers falder i øjnene er den enkelte afviger/outlyer som er vægten uge 4.
Ser man bort fra den passer modellen fint, og der er heller ingen systematik at spore i risidualerne.

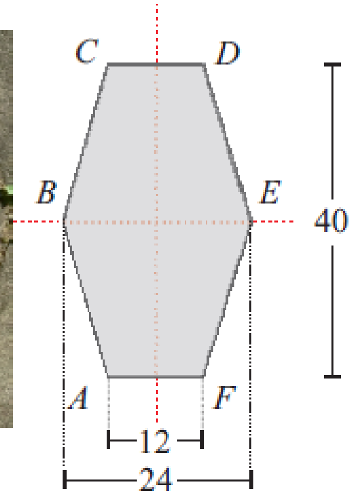
Så hvad kan man sige om modellens anvendelighed? Bom, bom...Det er lidt løst hvad man kan sige. Det ser da meget godt ud. Alternative modeller (eksponetiel, potensiel eller polynomiel giver en næsten ensliggende kurve i det aktuelle område, så der er i hvert fald ikke noget andet der er bedre.

KOMMENTAR
Faktisk mener jeg et punktplottet til venstre giver BEDRE overblik end risidualplottet.
Risidualplottet viser intet, som ikke ses direkte af punktplottet.
Omvejen med at se på risidualspreningen relativt til tallene i B-kollonen, giver ikke mere indsigt end vi får, ved at vurdere hvor langt punkterne i punktplottet ligger fra den blå linje.

612

Opgaveformulering





En terrasse har en flisebelægning som vist på billedet til venstre. Hver flise er sekskantet og symmetrisk omkring hver af de to stiplede linjer midt gennem flisen. Linjerne ses på modellen af en flise til højre.
Hver flise har målene $|AC| = |FD| = 40$ cm, $|BE| = 24$ cm og $|AF| = |CD| = 12$ cm.

a) Tegn en model af en flise i et koordinatsystem og bestem koordinatsættet til hvert af punkterne A, B, C, D, E og F.

b) Benyt en formel for bestemmelse af vinklen mellem to vektorer til at bestemme vinkel A.

Et havebord har en cirkelformet fod med en diameter på 41 cm.

c) Undersøg, om havebordets fod kan dække en hel flise.

Besvarelse

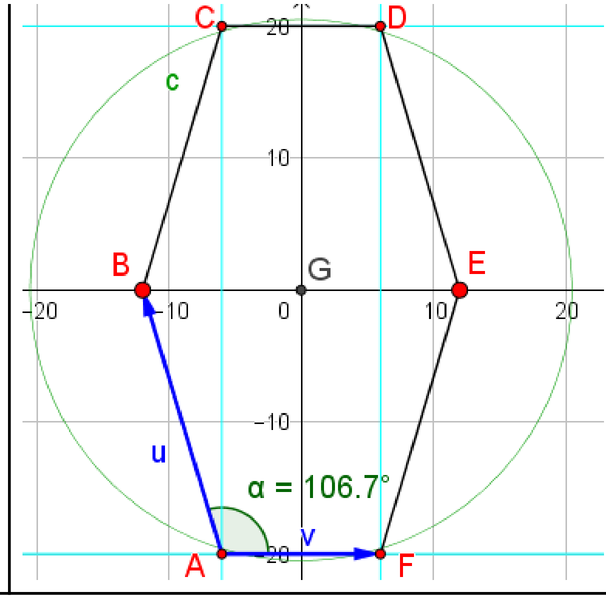
Jeg vælger de 2 symmetrikakser som 1. og 2. akse. Jeg tegner i geogebra.

Jeg tegner linjerne y=+/-20 og x=+/-6. A,C, D og F er skæringerne mellem disse.
Dvs A=(-6,-20), C=(-6,20), D=(6,20) og F=(6,-20).
B og E ligger på x-aksen og de må have koordinaterne B=(-12,0) og E i (12,0).

De to vektorer der skal bruges til at bestemme vinkel A er tegnet ind med blåt. Som kontrol er vinkel A også tegnet og bestemt i geogebra med grønt. Vinklen A er 106,7 grader. Jeg tegner en cirkel med centrum i Origo (og flisen) med radius 20.5. Det ses nu umiddelbart at cirklen passerer en	

smule under punkterne D og D, bordets fod kan lige akurat IKKE dække flisen.

Flisehjørneen rager dog kun 3,8mm ud, så i den virkelige verden med fuger og snavs, er der næppe nogen der vil bemærke dem, med mindre de stikke næsen helt ned til jorden.



Bestemmelse af vinkel A med formel:

Vektoren u=$\overrightarrow{AB}$ har koordinaterne: $u := \langle -6, 20\rangle = \begin{bmatrix} -6 \\ 20 \end{bmatrix}$ og v= $\overrightarrow{AF}$ $v := \langle 12, 0\rangle = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vinklen bestemmes ved at indsætte i formel 52 (eller 51) fra formelsamlingen og løse mht. v:

$$Cos(A) = \frac{u \cdot v}{len(u) \cdot len(v)} \xrightarrow{\text{solve}} \{A = 106.6992442\}$$

Det stemmer med Geogebra!

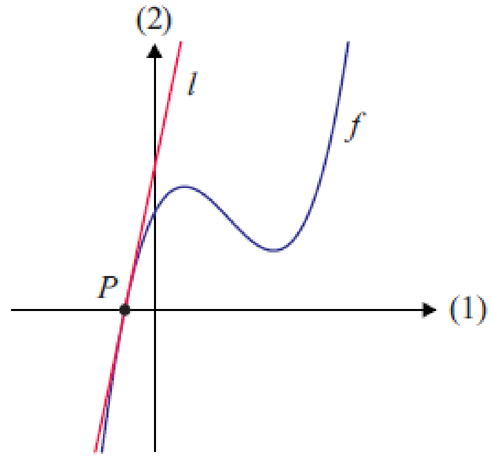
613

Opgaveformulering

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x + 20{,}5.$$

Det oplyses, at grafen for f har ét skæringspunkt P med førsteaksen. Tangenten til grafen for f i punktet P benævnes l.



a) Benyt en algebraisk ligningsløser i et værktøjsprogram til at bestemme førstekoordinaten til P.

b) Bestem en ligning for l.

c) Bestem den spidse vinkel, som l danner med førsteaksen.

Besvarelse

Jeg definerer f: $f(x) := x^3 - 7.5\,x^2 + 12\,x + 20.5 = x \rightarrow x^3 + (-1)\cdot 7.5\,x^2 + 12\,x + 20.5$

I P er f(x)=0 så P's førstekoordinat findes ved: $f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solutions for x}} -1.$

Tangentens ligning er y=f'(x)*(x-x0)+f(x0), (formel 130 i formelsamlingen) så jeg indsætter x0=-1 i den:

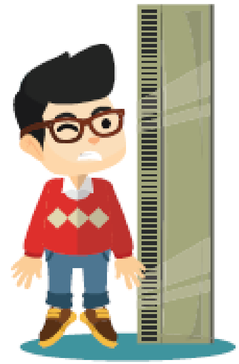
$y = f'(-1)\cdot(x - (-1)) + f(-1) \overset{\text{simplify}}{=} y = 30.0\,x + 30.0$

Ligningen for l er altså y=30x+30.

Hældninge af l er 30 grader, så vinklen l danner med x-aksen er: $invTan(30) = 88.09084757$

614

Opgaveformulering



Grafik: www.colourbox.dk

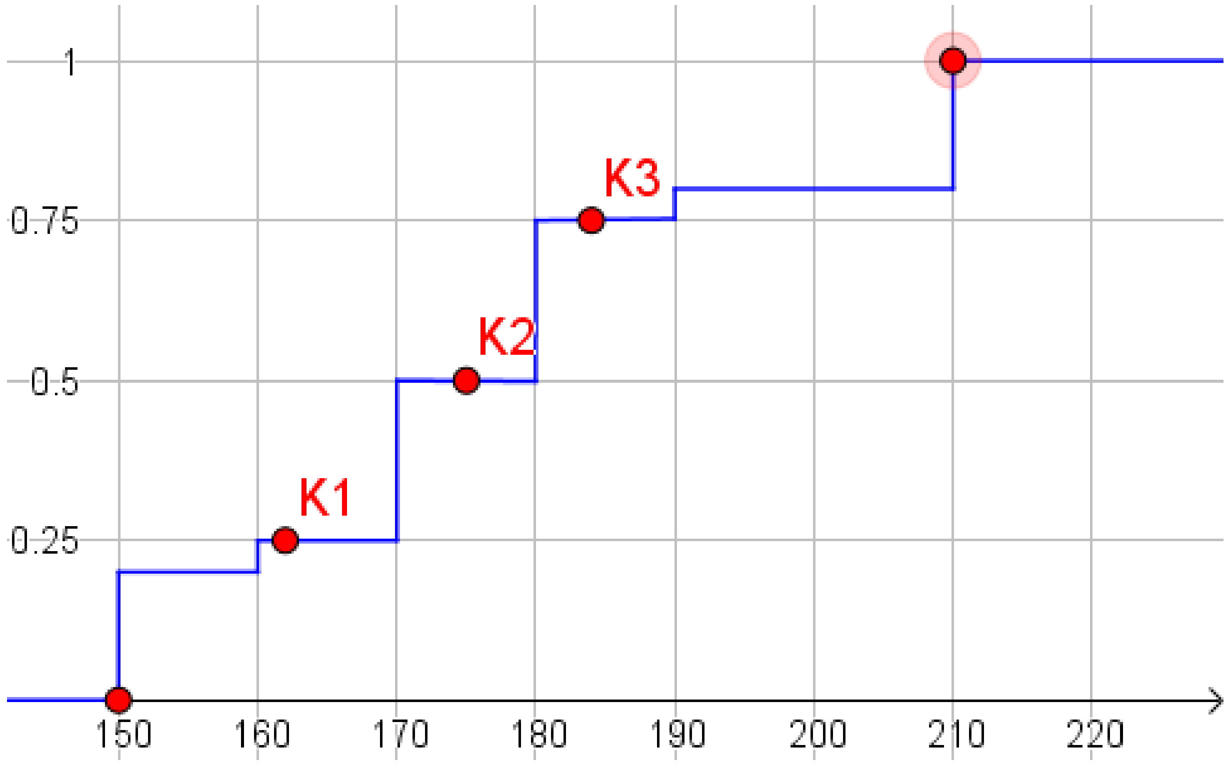
På en bestemt skole har man målt højden af hver elev. Målingerne blev sorteret i intervaller af længde 10 cm, startende med 150 cm. Den laveste elev var 152 cm høj, og den højeste elev var 205 cm høj. Endvidere fandt man følgende kvartilsæt for elevernes højdefordeling: (162, 175, 184).

a) Tegn en mulig sumkurve for højdefordelingen af eleverne.

Besvarelse

X-aksen skal indeholde intervallet fra 150 til 205 og yaksen skal gå fra 0 til 1 (100%).
Dermed kan et koordonatsystem tegnes, jeg har bugt Geogebra.

Kvartilsættet fortæller mig at sumkurven skal gå gennem punkterne (162, 0,25), (175, 0,5) og (184, 0,75) så disse indtegnes. Da intervallerne har bredde 10 startende i 150, kan jeg tegne nogle 'trappetrin' der begynder i (150, 0) og ender i (210,0). Det kan gøres på flere måder, her er en:

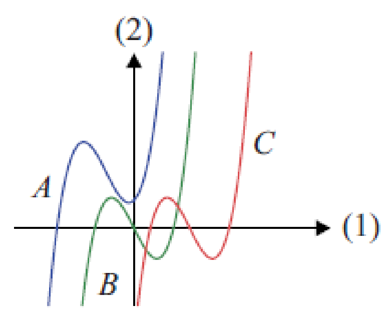


615

Opgaveformulering

Ud fra en funktion f er funktionerne g og h bestemt ved

$$g(x) = f(x-2)$$
$$h(x) = f(x+1) + 2.$$



På figuren ses graferne for de tre funktioner f, g og h.

a) Gør for hver af de tre grafer A, B og C rede for, hvilken funktion f, g eller h den er graf for.

Besvarelse

Af definitionen for g(x), ses at dens graf er lige grafen for f(x) rykket *2 mod højre.*

Hermed ses at B er grafen for f(x), C er grafen for g(x), og følgelig er A grafen for h(x).

616

Opgaveformulering

En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x) = 2 \cdot e^{x}.$$

Punktet *P* har koordinatsættet $P(3,1)$. Punktet *Q* ligger på grafen for *f* og har koordinatsættet $Q(x, f(x))$.

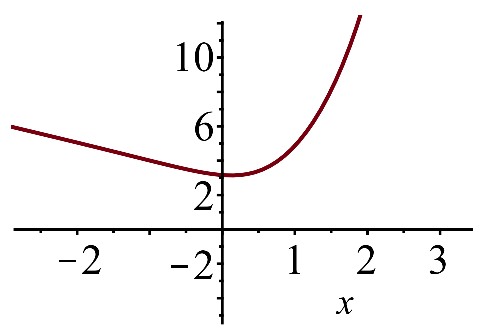
a) Opstil et udtryk for længden af $\overrightarrow{QP}$.

b) Bestem koordinatsættet til *Q*, så $\left|\overrightarrow{QP}\right|$ bliver mindst mulig.

Besvarelse

Formlen for afstand mellem 2 punkter (69 i formelsamling) giver:

$|QP|=g(x) := \sqrt{(3-x)^2 + (1-2\cdot e^{x})^2}$

Jeg leder efter lokale ekstrema for dette udtryk ved at løse: $g'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} 0.1255765328$ Jeg plotter også g(x), og ser at der faktisk er et minimum i 0,1256. y-koordinaten i Q er $2 \cdot \exp(0.1255765328)$ = 2.267603878, så Q koordinater er: (0,1256, 2,2676).	$plot(g(x))$ 

#7.mw

Der bruges amerikansk/britisk komma/punktum i Maple-matematikdelen, ellers kontinentaleuropæisk.
Besvarelsen er lavet i Maple 18 med disse tilføjelser:
$with(Gym)$:

1

Opgaveformulering

I et koordinatsystem er to vektorer givet ved

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

Bestem t, så vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale, og bestem t, så vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

Besvarelse

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale netop når deres prikprodukt er 0.
Prikproduktet er $(t+1)\cdot 3+2\,t\cdot 4=11\,t+3$: .

Det ses at være 0 for $t=-\dfrac{3}{11}$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle netop når deres determinant er 0.
Determinanten er $(t+1)\cdot 4-2\,t\cdot 3=-2\,t+4$: .

Den ses at være 0 for $t=\dfrac{4}{2}=2$.

23

Opgaveformulering

I et koordinatsystem er to vektorer a og b bestemt ved

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem tallet s, således at $\vec{a}+s\vec{b}$ og $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ er ortogonale.

b) Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{a}-\vec{b}$.

c) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Besvarelse

$\vec{a} := \langle 2, 3\rangle$: $\quad \vec{b} := \langle -1, 2\rangle$: $\quad \vec{v} := \langle 1, -1\rangle$:

To vektorer er ortogonale netop når deres prikprodukt er 0, så vi opstiller ligningen:
$(\vec{a} + s \cdot \vec{b}).\vec{v} = 0 \xrightarrow{\text{isolate for s}} s = -\frac{1}{3}$

Arealet af parallellogrammet udspændt af to vektorer er givet ved deres determinant som gympakken kan klare for os: $A = |det(\vec{a}, \vec{b} - \vec{a})| = A = 7$
(Det(a, a-b) er faktisk lig det(a, b). Det(a, a) er nemlig 0)

Vi kan bruge projektionsformlen: $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}\vec{b} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$

Der er faktisk også en funktion til det i gympakken: $proj(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$

58

Opgaveformulering

I et koordinatsystem er to vektorer a og b bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

b) Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

c) Bestem projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.

Besvarelse

$\vec{a} := \langle 1, 2 \rangle :$
$\vec{b} := \langle -3, 2 \rangle :$

Gympakken kan give os vinklen direkte: $vinkel(\vec{a}, \vec{b}) = 82,87$

Alternativt kan vi finde den ved formlen: $Cos(v) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 2^2}} \xrightarrow{\text{solve}}$

82.87498365

Arealet af parallellogrammet udspændt af to vektorer er givet ved deres determinant som gympakken kan klare for os: $A = \left|det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| = A = 8$

Projektion af vektor på vektor kan gympakken klare for os:

$$proj\left(\vec{b}, \vec{a}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

76

Opgaveformulering

To vektorer er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Bestem projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

b) Bestem arealet af det parallelogram, som udspændes af de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Besvarelse

$\vec{a} := \langle 6, 2 \rangle$:
$\vec{b} := \langle 3, 4 \rangle$:

Projektion af vektor på vektor kan gympakken klare for os:

$$proj\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \begin{bmatrix} \frac{78}{25} \\ \frac{104}{25} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} \begin{bmatrix} 3.1200 \\ 4.1600 \end{bmatrix}$$

Arealet af parallellogrammet udspændt af to vektorer er givet ved deres determinant som gympakken kan klare for os: $A = \left|det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| = A = 18$

137

Opgaveformulering

Bestem tallet t, så vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5t-1 \\ 3 \end{pmatrix}$ er ortogonale.

Besvarelse

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale netop når deres prikprodukt er 0.

Prikproduktet er $1\cdot(5\,t-1)+(-2)t\cdot 3 = -t-1$: .   Så t=-1.

142

Opgaveformulering

I et koordinatsystem er givet to punkter $P(3,1)$ og $Q(20,7)$ samt en vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

a) Bestem en ligning for den linje, der går gennem P, og som står vinkelret på $\vec{a}$.

b) Bestem arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne $\overrightarrow{PQ}$ og $\vec{a}$.

c) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\overrightarrow{PQ}$ på $\vec{a}$.

Besvarelse

$\vec{a} := \langle 4,-3\rangle$:

$\vec{P} := \langle 3, 1\rangle$:

$\vec{Q} := \langle 20, 7\rangle$:

$$\overrightarrow{PQ} := \vec{Q}-\vec{P} \overset{\text{simplify constant}}{=} \begin{bmatrix}17\\6\end{bmatrix}$$

a er normalvektor til linjen så a er 4 og b er -3 i linjens ligninge på formen ax+by-c=0.
c bestemmes ved at indsætte et punkt fx P i linjens ligning:

$$4\cdot 3-3\cdot 1+c=0 \xrightarrow{\text{solve for c}} [[c=-9]]$$

Linjens ligning er dermed: 4x-3y-9=0.

unassign('A')

Arealet af parallellogrammet udspændt af to vektorer er givet ved deres determinant som gympakken kan klare for os:

$$A=\left|det\left(\vec{a},\ \overrightarrow{PQ}\right)\right| = A=75$$

Projektionen af $\overrightarrow{PQ}$: på $\vec{a}$: kan findes ved formlen: $\dfrac{\overrightarrow{PQ}.\vec{a}}{\vec{a}.\vec{a}}\,\vec{a} = \begin{bmatrix}8\\-6\end{bmatrix}$

187

Opgaveformulering

I et koordinatsystem er to vektorer $\vec{a}$ og b bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

b) Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Besvarelse

$\vec{a} := \langle 5, -10 \rangle$:

$\vec{b} := \langle 6, 8 \rangle$:

Projektionen af $\vec{a}$: på $\vec{b}$: kan findes ved formlen: $\frac{\vec{a} . \vec{b}}{\vec{b} . \vec{b}} \vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$

Arealet af parallellogrammet udspændt af to vektorer er givet ved deres determinant som gympakken kan klare for os: $A = \left| det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right| = A = 100$

245

Opgaveformulering

I et koordinatsystem i planen er givet to punkter $A(1,1)$ og $B(5,3)$. Linjen l går gennem A og B.

a) Bestem en ligning for l på formen $ax + by + c = 0$.

En parabel har ligningen

$$y = x^2 - 8x + 13{,}5.$$

b) Bestem afstanden mellem linjen l og parablens toppunkt.

c) Bestem koordinatsættet til projektionen af parablens toppunkt på l.

Besvarelse

$\vec{A} := \langle 1, 1 \rangle$:

$\vec{B} := \langle 5, 3 \rangle$:

$\overrightarrow{AB} := \vec{B} - \vec{A} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Koeficienterne a og b er koordinaterne til hatvektoren til retningsvektoren $\overrightarrow{AB}$: Dvs a er -2 og b er 4.

c kan bestemmes ved at indsætte det ene punkt fx a i ligningen: $-2\cdot 1 + 4\cdot 1 + c = 0 \xrightarrow{\text{solve for c}}$
$[[c = -2]]$
Ligningen for l er altså: -2x+4y-2=0, eller reduceret x-2y+1=0.

$f(x) := x^2 - 8\,x + 13.5$: Dvs a er 1 og b er -8. Så toppunktsformlen giver os:

x0=Tx : $-\frac{-8}{2\cdot 1} = 4$ og y-koordinaten er y0= $f(4) = -2.5$. Dvs $\vec{T} := \left\langle 4, -\frac{5}{2} \right\rangle$:

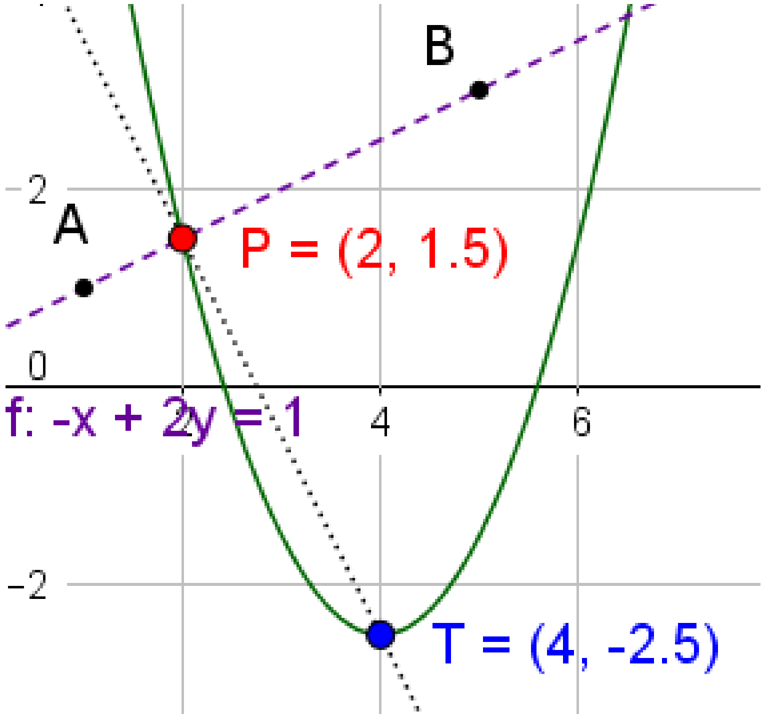
Afstanden fra toppunkt til l : $\frac{|a\cdot x_0 + b\cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$: $\frac{|(-2)\cdot 4 + 4\cdot(-2.5) - 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} \xrightarrow{\text{at 5 digits}}$
4.4722
Hvor a, b og c her er koefficienterne i ligningen for l.

Først bestemmes $\overrightarrow{AT} := \vec{T} - \vec{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$

Herefter projiceres den på $\overrightarrow{AB}$ (og dermen på l) $\overrightarrow{AP} := proj\left(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Projektionen P, af parablens toppunkt T, findes ved at lægge den til: $\vec{A} + \overrightarrow{AP} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Hele denne opgave kan løses meget hurtigere i Geogebra, ved at 'tegne sig frem' via værktøjerne. Her er vist et skærmklip.



255

Opgaveformulering

En cirkel er bestemt ved ligningen

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4.$$

Bestem cirklens radius og koordinatsættet til cirklens centrum.

Besvarelse

Ligningen omskrives ved håndkraft:

$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$:

Af den sidste form kan vi aflæse at radius er 3 og centrum ligger i punktet (-1, 2).

271

Opgaveformulering

I et koordinatsystem i planen er givet to punkter $C(-1, 4)$ og $P(2, 8)$.

a) Opskriv en ligning for den cirkel, der går gennem P og har centrum i C.

En linje i planen er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \; t \in R.$$

b) Bestem koordinatsættet til hvert af linjens skæringspunkter med cirklen.

Besvarelse

Radius er afstanden fra C til P bestemmes ved afstandsformlen: $\sqrt{(2-(-1))^2+(8-4)^2} =$
5

Dermed er cirkelns ligning: $(x+1)^2+(y-4)^2=25:$

Jeg indsætter x=-3+t og y=15+7t fra parameterfremstillingen ind i cirklens ligning:
$subs\left(x=-3+t,\ y=15+7\,t,\ (x+1)^2+(y-4)^2=25\right) = (-2+t)^2+(11+7\,t)^2=25$

Herefter løser jeg den mht til t: $\xrightarrow{\text{solve for t}} [[t=-1],[t=-2]]$

Der er altså to skæringspunkter og de findes ved at indsætte t-værdierne i parameterfremstillingen:

$(x, y) = (-3, 15) - 1 \cdot (1, 7) = (x, y) = (-4, 8)$
$(x, y) = (-3, 15) - 2 \cdot (1, 7) = (x, y) = (-5, 1)$

De to punkter er altså (-4,8) og (-5,1).

#8.mw
Der bruges amerikansk/britisk komma/punktum i Maple-matematikdelen, ellers kontinentaleuropæisk. Besvarelsen er lavet i Maple 18 med disse tilføjelser:
$with(Student[Calculus1]):$
$with(Gym):$

12

Opgaveformulering

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 4\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}x^2, \quad x \geq 0\,.$$

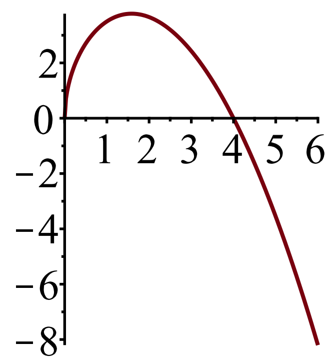
a) Bestem monotoniforholdene for f.

Grafen for f og koordinatsystemets førsteakse afgrænser i første kvadrant et område M, som har et areal.

b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes $360°$ omkring koordinatsystemets førsteakse.

Besvarelse

$f(x) := 4\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}x^2 :\quad plot(f, 0..6)$



For at finde lokale ekstrema løser vi: $f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solutions for x}} 2^{2/3} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 1.5874$
Grafen viser at det er et maksium.
Det stemmer med at krumnigen $f''\left(2^{2/3}\right) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} -1.5000$ er negativ.
Altså er f(x) voksende i intervallet [0;1,5874] og aftagende i [1,5874;∞[.

Der er et nulpunkt til højre for ekstremaet, som bestemmes: $f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solutions for x}} 0, 4$

Omdrejninglegemet ligger altså mellem grænserne 0 og 4, så vi indsætter i formlen:

$\pi \int_0^4 f(x)^2 \, dx \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 103.40$ Rumfanget er altså ca 103,4.

17

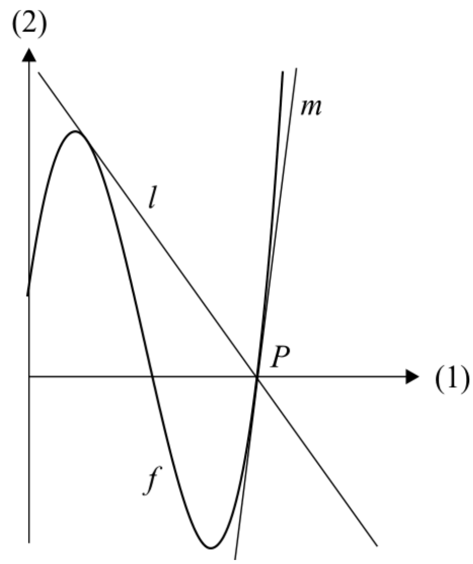
Opgaveformulering

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 5.$$

Tangenten til grafen for f i punktet $P(5, f(5))$ kaldes m. Som det ses på figuren, har grafen for f også en anden tangent l, der går igennem P.

a) Bestem en ligning for m, og bestem førstekoordinaten til røringspunktet for l.



Besvarelse

$f(x) := 2x^3 - 15x^2 + 24x + 5:\quad f(5) = 0$

Tangentens ligning $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ gælder i ethvert punkt.

Ligning for m findes ved at indsætter at xo=5 i P : $y = f'(5) \cdot (x - 5) + f(5) = y = 24x - 120$

Mht til ligning for l er det xo der er ubekendt. Men vi kender et punkt på linjen, nemlig P så vi indsætter P's koordinater for x og y i tangentens ligning og løser mht til x0:

$$0 = f'(x_0) \cdot (5 - x_0) + f(x_0) \xrightarrow{\text{solve for x[0]}} \left[\left[x_0 = \frac{5}{4}\right], [x_0 = 5], [x_0 = 5]\right]$$

Hermed har vi fundet mulige 1. koordinater til supplerende tangeringspunkter for m. Dobbeltroden 5 svarer til P selv. En anden mulighed er den 1. løsning.

1. koordinaten til røringspunktet for l er altså $x_0 := \frac{5}{4}$:

Ligningen for l kan så findes ved at indsætte xo=5/4 i tangentens ligning:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \overset{\text{simplify}}{=} y = -\frac{33x}{8} + \frac{165}{8}$$

Men det sidste er vi ikke spurgt om.

28

Opgaveformulering

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - 10x + 30 .$$

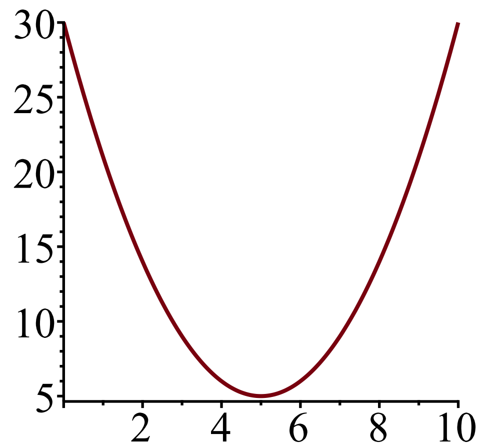
Grafen for f, koordinatakserne og linjen med ligningen $x = 10$ afgrænser i første kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

a) Bestem arealet af M.

b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes $360°$ omkring førsteaksen.

Besvarelse

$f(x) := x^2 - 10\,x + 30 :\quad plot(f, 0\,..10)$



Der er ingen særlige overvejelser med nulpunkter eller fortegn, det er lige ud ad landevejen:

Arealet af M bestemmes ved integralet: $\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x \; \frac{400}{3} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 133.33$

Rumfanget af omdrejningslegemet bestemmes ved : $\pi \int_0^{10} f(x)^2\,\mathrm{d}x \; \frac{7000\,\pi}{3} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 7330.3$

29

Opgaveformulering

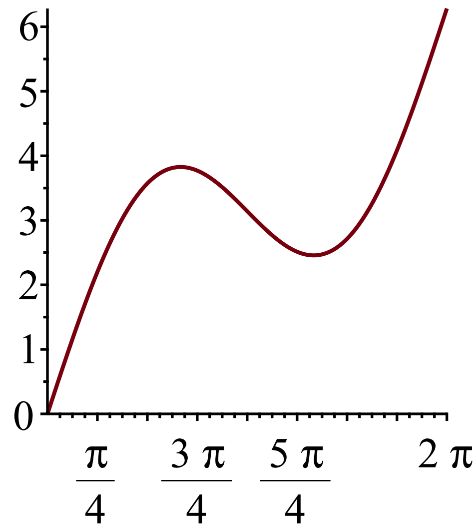
En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x + 2\sin x, \quad x \in [0; 2\pi] .$$

a) Løs ligningen $f'(x) = 0$, og gør rede for monotoniforholdene for f.

Besvarelse

$f(x) := x + 2\sin(x) :\ \ plot(f, 0..2\pi)$



Det er godt at tegne grafen, så ser vi med det samme at der er 2 steder med vandret tangent i det relevante interval. Det er ikke alle Maples solve-muligheder der giver dem begge, men Gym-pakkens intervalsolve gør. Så de to løsninger til f'(x)=0 er:

$$intervalsolve(f'(x) = 0, x = 0..2\pi) = \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$$

Det også muligt at løse den manuelt. Ligningen $f'(x) = 0 :$ bliver

$1 + 2\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} :$

Cos(120) grader er minus en halv og det er cos(240) også. Det svarer til radianerne $\frac{2}{3}\pi :$ og $\frac{4}{3}\pi :$.

Men det kunne kun lade sig gøre fordi ligningen var så venlig at have pæne løsninger.

f(x) er voksende i intervallerne $\left[0; \frac{2}{3}\pi\right]$ *og* $\left[\frac{3}{4}\pi ; 2\pi\right] :$

f(x) er aftagende i intervallet $\left[\frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi\right] :$

34

Opgaveformulering

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + k\,,$$

hvor k er et tal.

a) Bestem de værdier af tallet k, for hvilke grafen for f har netop to skæringspunkter med førsteaksen.

Besvarelse

$f(x) := x^3 + 6x^2 + k = x \to x^3 + 6x^2 + k$

Forudsætningen for at et 3 gradspolynomium kun har 2 rødder er at det ene lokale ekstrema ligger på x-aksen.
Man kan diskutere om et punkt hvor der tangeres er et skæringspunkt. Hvis nej, er der ingen mulige værdier for k.

Men hvis vi opfatter skæringspunkter som alle 'fællespunkter'. Så kan vi gå frem ved først at bestemme beliggenheden af de lokale ekstrama:

$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = -4], [x = 0]]$

Her efter kan vi forlange at enten det ene eller andet ligger på y-aksen dvs:

$f(0) = 0 = k = 0$

$f(-4) = 0 = 32 + k = 0$

Så de to mulige værdier for k er 0 og -32.

45

Opgaveformulering

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = x^2 - x + 2,$$
$$g(x) = -x^2 + 5x - \frac{5}{2}.$$

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(2, f(2))$.

Det oplyses, at graferne for f og g har netop ét fælles punkt Q.

b) Bestem koordinatsættet til Q.

Besvarelse

$f(x) := x^2 - x + 2$:
$g(x) := -x^2 + 5x - \frac{5}{2}$:
For at finde tangentens ligning i P, indsætter vi xo=2 i $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$:
$y = f'(2) \cdot (x-2) + f(2) = y = 3x - 2$

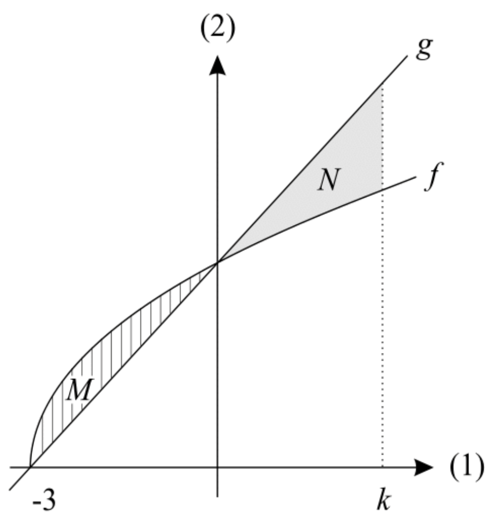
f og g's fællespunkt finides ved: $f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = \frac{3}{2}\right\}, \left\{x = \frac{3}{2}\right\}$

Koordinaterne til Q er: $\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{3}{2}, \frac{11}{4} = (1.5, 2.75)$

47

Opgaveformulering

To funktioner f og g har forskrifterne $f(x) = \sqrt{3x+9}$ og $g(x) = x + 3$.
Graferne for f og g afgrænser i anden kvadrant en punktmængde M, der har et areal.



a) Bestem arealet af M.

For $k > 0$ afgrænser graferne for de to funktioner sammen med linjen med ligningen $x = k$ i første kvadrant en punktmængde N.

b) Bestem k, så arealerne af M og N er lige store.

Besvarelse

$f(x) := \sqrt{3x+9}$:
$g(x) := x + 3$:
Vi har brug for deres skæringspunkter: $f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0\}, \{x = -3\}$

I 2.kvadrant ligger f over g så arealet af M er integralet:

$$\int_{-3}^{0} f(x) - g(x)\, dx = \frac{3}{2}$$

I 1.kvadrant ligger g over f så arealet af N er : $N(k) := \int_{0}^{k} g(x) - f(x)\, dx :$

Da de to areale skal være lige store: $N(k) = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{solve}} \{k = -3\}, \left\{k = \frac{7}{3}\right\}$

Den negative løsning kasseres da N ligger i 1.kvadrant, så k skal være $\frac{7}{3}$

66

Opgaveformulering

Om en funktion F gælder, at $F(x)$ er stamfunktion til

$$f(x) = -x^3 + 3x\,.$$

Linjen t med ligningen $y = -2x + 8$ er tangent til grafen for F, og det oplyses, at røringspunktet for t har negativ førstekoordinat.

a) Bestem en forskrift for F.

Besvarelse

$f(x) := -x^3 + 3x :$

I røringspunktet xo skal tangenten og grafen per definition have samme hældning.
Hældningen til grafen for F er givet ved f og hældningen af t er -2 så:
$f(x) = -2 \xrightarrow{\text{solutions for x}} 2, -1, -1$

Da xo skal være negativ har den værdien -1. y-koordinaten er så $-(2)\cdot(-1) + 8 = 10$.

En stamfunktion til f er: $integrate(f(x), x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \xrightarrow{\text{assign to a name}} F(x)$

I røringspunktet xo skal tangenten og grafen per definition også have samme y-værdi:
$F(-1) + k = 10 \xrightarrow{\text{solve for k}} \left[\left[k = \frac{35}{4}\right]\right]$

Forskriften for F(x) er derfor: $F(x) + \frac{35}{4} = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{35}{4}$

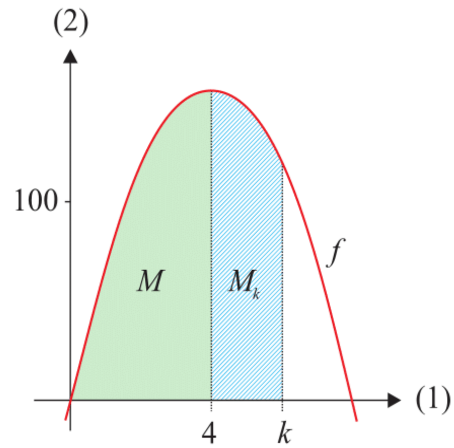
67

Opgaveformulering

På figuren ses grafen for funktionen

$$f(x) = 80x - 10x^2$$

samt to punktmængder M og M_k.
Punktmængden M er afgrænset af grafen for f, koordinatsystemets førsteakse samt linjen med ligningen $x = 4$.
Punktmængden M_k er afgrænset af grafen for f, koordinatsystemets førsteakse samt linjerne med ligningerne $x = 4$ og $x = k$, hvor $k > 4$.



Når punktmængderne M og M_k drejes 360° om førsteaksen, fremkommer to omdrejningslegemer med rumfang V og V_k.

a) Bestem V, og bestem k, så $V_k = \frac{1}{2}V$.

Besvarelse

$f(x) := 80\,x - 10\,x^2$:

Vi skal bruge skæringerne med x-aksen: $f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 0\}, \{x = 8\}$

V bestemmes ved formlen for et omdrejninglegeme: $V := \pi \int_0^4 f(x)^2 \, dx = \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 171570.$

Vk bestemmes ved integralet: $VK := \pi \int_4^k f(x)^2 \, dx$:

så k bestemmes (numerically solve) ved ligningen: $VK = \frac{1}{2} \cdot V \xrightarrow{\text{solve}} 5.124510689$

k skal altså afrundet være 5.125.

93

Opgaveformulering

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x \cdot e^{2x}.$$

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

b) Bestem monotoniforholdene for f.

Besvarelse

restart

$f(x) := x \cdot e^{2x}$:

I tangentens ligning $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ indsættes xo=1:

$y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1) = y = 3\,e^2\,(x-1) + e^2 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} y = 22.167\,x - 14.778$

Vi kan bevidstløst lade Maple finde nulpunkter til $f'(x) \overset{\text{simplify}}{=} e^{2x}\,(2x+1)$.
Men så ved vi ikke om vi får alle nulpunkter ud. Af udtrykket ovenfor ses imidlertid at der kun er en løsning (når bageste parentes er 0) x=-1/2 fordi forfaktoren altid er positiv.

Krumningen i ekstremaet $f''(-0.5) = 0.7357588826$ ses at være positiv, så der er tale om et minimum.

Altså er f er aftagende i intervallet $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ og voksende i intervallet $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right[$

#9.mw

Der bruges amerikansk/britisk komma/punktum i Maple-matematikdelen, ellers kontinentaleuropæisk.
Besvarelsen er lavet i Maple 18 med disse tilføjelser:
with(*Student*[*Calculus1*]) :
with(*Gym*) :

101

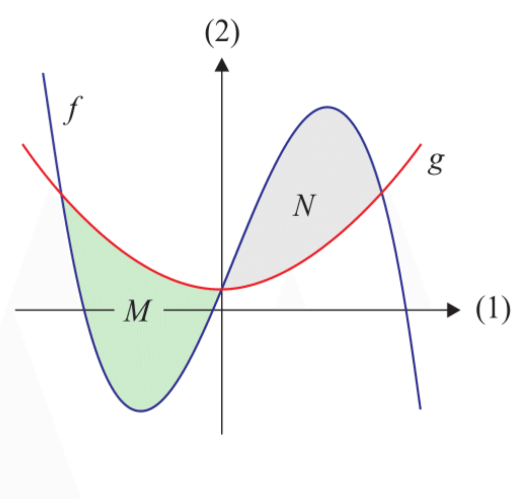
Opgaveformulering

To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = -x^3 + x^2 + kx + 3$$
$$g(x) = x^2 + 3,$$

hvor k er et positivt tal.

Graferne for f og g afgrænser for $x \leq 0$ et område M, der har et areal, og for $x \geq 0$ et andet område N, der har et areal.



a) Gør rede for, at de to områder M og N har samme areal for alle værdier af k.

Besvarelse

$f(x) := -x^3 + x^2 + k \cdot x + 3:$
$g(x) := x^2 + 3:$

Skæringerne mellem f og g findes ved ligningen: $f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve for x}}$
$[[x=0], [x=\sqrt{k}], [x=-\sqrt{k}]]$

Påstanden i opgaven er at de to arealer, dvs de to integraler er ens:

$$\int_{-\sqrt{k}}^{0} (g(x) - f(x))\, \mathrm{d}x = \int_{0}^{\sqrt{k}} (f(x) - g(x))\, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\, k^2 = \frac{1}{4}\, k^2$$

Det ses at være tilfældet.

Det kan faktisk også gennemskues næsten uden at regne. Differensfunktionen
$h(x) = f(x) - g(x) = -x^3 + k\,x$
ses at være ulige, dvs antisymetrisk. Der gælder for alle x: h(x)=-h(-x). Så derfor er arelaerne lige store.

122

Opgaveformulering

Bestem integralet $\int_0^1 (8x^3 + \mathrm{e}^x)\,dx$.

Besvarelse

$$\int_0^1 8\,x^3 + \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x = [2\,x^4 + e^x]_0^1 = 2 \cdot 1^4 + \mathrm{e}^1 - 2 \cdot 0^4 - e^0 = 2 + e - 1 = 1 + \mathrm{e}:$$

131

Opgaveformulering

I en model for udviklingen af antallet af individer i en population betegner $N(t)$ antal individer i populationen til tiden t (målt i døgn). I modellen antages, at

$$N(t) = \frac{4200}{1 + 10 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot t}} .$$

a) Bestem $N'(20)$, og giv en fortolkning af dette tal.

Besvarelse

$N(t) := \dfrac{4200}{1+10\cdot e^{-0.1\,t}}$:

$N'(20) = 102.6328141$

Tallet fortæller at efter 20 døgn vokser antallet af individer med ca 103 i døgnet.

134

Opgaveformulering

To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - 4x + 8$$
$$g(x) = 3x \cdot e^{-x}.$$

a) Bestem den værdi af x, hvor den lodrette afstand mellem grafen for f og grafen for g er mindst mulig.

Besvarelse

$f(x) := x^2 - 4\,x + 8$:

$g(x) := 3\,x\cdot e^{-x}$:

Den lodrette afstand er den numeriske værdi af differensen mellem de 2 funktioner.

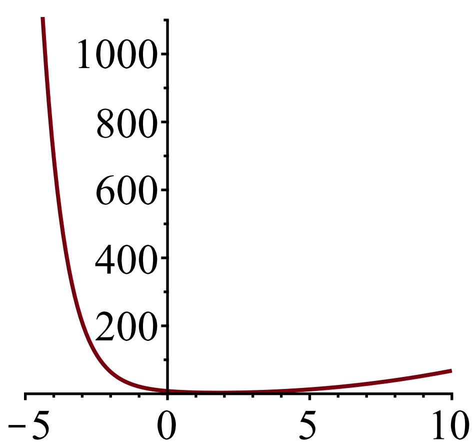
$h(x) := \text{abs}(f(x) - g(x))$:

Den er minimal eller maksimal når den afledede er 0, så vi løser: $h'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}}$

1.801564133

Vi checker at det faktisk er et minimum ved at se på grafen:

$plot(h)$



Den værdi af x hvor afstanden er mindst er altså ca 1.80.

Faktisk er det vanskeligt at gøre rede for at der ikke kan tænkes andre minima i et andet område. Det hænger på at når x er en stor negativ værdi dominerer g(x) og omvendt når x er en stor positiv værdi.

146

Opgaveformulering

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x+1)\cdot e^{-x}\,.$$

a) Bestem monotoniforholdene for f.

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets akser i anden kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

b) Bestem arealet af M.

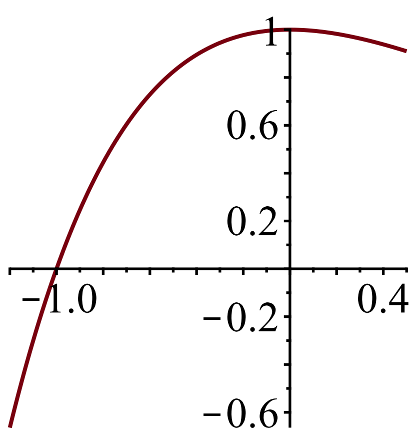
c) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

Besvarelse

$f(x) := (x+1)e^{-x}$:

kandidater til lokale ekstrema findes ved $f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x=0]]$
Da krumingen i x=0 er $f''(0) = -1$ som er negativ er der tale om et maksimum, så f(x) er voksende i intervaller]-∞;0] og aftagende i [0,∞[.

Det ses umiddelbart ved nulreglen at det eneste nulpunkt for f er -1.
$plot(f, -1.2..0.5)$



Arealet af M bestemmes ved integralet:

$$\int_{-1}^{0} f(x)\, dx = e - 2 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 0.7183$$

Rumfanget af omdrejninglegemet bestemmes ved: $\pi \int_{-1}^{0} f(x)^2\, dx = \pi\left(\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4}\right) \xrightarrow{\text{at 5 digits}}$ 1.8765

178

Opgaveformulering

I en model kan længden af dagen i Anchorage Alaska som funktion af tiden beskrives ved

$$f(t) = 6{,}61 \cdot \sin(0{,}0167t - 1{,}303) + 12{,}2\ , \quad 0 \le t \le 365,$$

hvor $f(t)$ er længden af dagen (målt i timer) til tidspunktet t (målt i døgn efter 1. januar 2011).

a) Benyt modellen til at bestemme længden af dagen i Anchorage Alaska til tidspunktet $t = 100$.

b) Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt, hvor længden af dagen i Anchorage Alaska er størst.

c) Bestem $f'(100)$, og gør rede for, hvad dette tal fortæller.

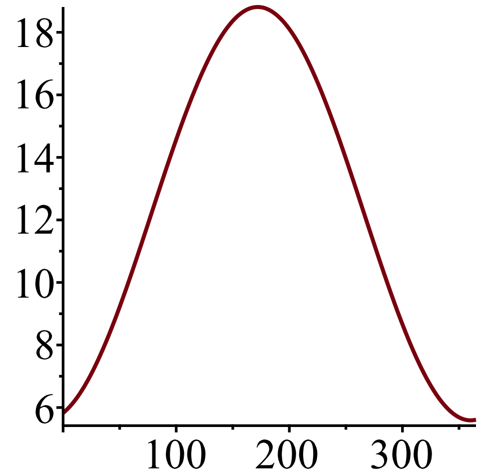
Kilde: http://aa.usno.navy.mil

Besvarelse

$f(t) := 6.61 \cdot \sin(0.0167\, t - 1.303) + 12.2$:

Efter 100 dage er dagens længde: $f(100) =$ 14,57 timer

Vi plotter funktionen i et år: $plot(f, 0 ..365)$



Tidspunktet for den længste dag findes ved at finde løsninger til f'(t)=0 der skal ligge i nærheden af t=200:
$f'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 172.0836124]]$ Via grafen ses at den løsning Maple finder er et maksimum.
Så dagen er længst 172 dage inde i 2011.

$f'(100) = 0.1030361083$
Dette tal fortælle at efterr 100 dage tiltager dagens længde med ca 0,10 time per døgn. Dvs ca 6 min.

230

Opgaveformulering

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x^3 - 8) \cdot \ln x, \quad x > 0.$$

a) Løs ligningen $f(x) = 0$.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

Besvarelse

$f(x) := (x^3 - 8) \cdot \ln(x)$:

Via nulreglen ses at enten skal der er løsningerne x=1 (ln(x)=0) eller x=2 ($x^3 - 8 = 0$:)

Vi bruger Maples indbyggede funktion: $y = Tangent(f(x), x = 1) = y = -7x + 7$

243

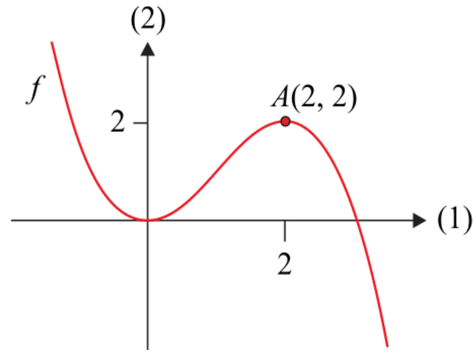
Opgaveformulering

En funktion f er givet ved

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2.$$

Grafen for f har et lokalt ekstremumspunkt i punktet $A(2,2)$.

a) Bestem konstanterne a og b.



Besvarelse

$unassign('a')$: $f(x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2$:

Oplysningen om ekstremum i (2,2) betyder at ligningerne f(2)=2 og f'(2)=0 gælder.

Konstanterne a og b kan derfo rfindes ved at løse de to ligninger:

(9.8.2.1)

$$solve(\{f(2) = 2, f'(2) = 0\}, \{a, b\}) = \left\{a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}\right\}$$

#10.mw

$with(Gym)$:

$with(RealDomain)$:

701

Opgaveformulering

En funktion er givet ved: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$

a. Bestem en ligning for niveaukurven z=5.

b. Bestem en ligning for niveaukurven z=k.
   Hvilken punktmængde beskriver ligningen?

c. Tegn et plot af snitkurven for f(x,y) med xz-planen.

d. Tegn et 3d plot af grafen for f(x,y).

Besvarelse

Jeg sætter funktionsværdien lig 5, hvilket giver følgende ligning:

$\sqrt{x^2 + y^2} + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16$:

Tallet 5 erstattes med a, hvilket giver ligningen:

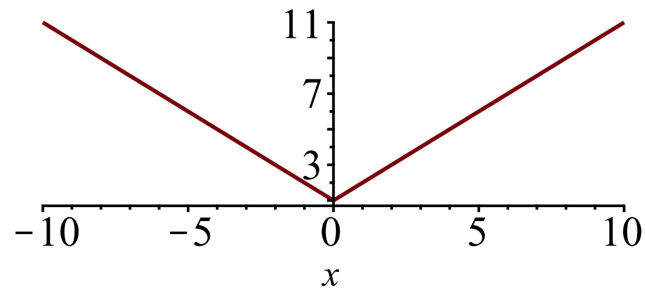
$x^2 + y^2 = (a - 1)^2$: som er ligningen for en cirkel.

I xz-planen er y=0, så her bliver forskriften :

$f(x, 0) = \sqrt{x^2} + 1 = |x| + 1$:

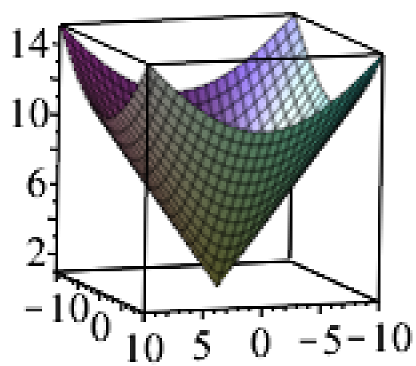
Jeg tegner derfor et 2D-plot over xz-planen og grafen ses til højre.

$plot(|x| + 1)$



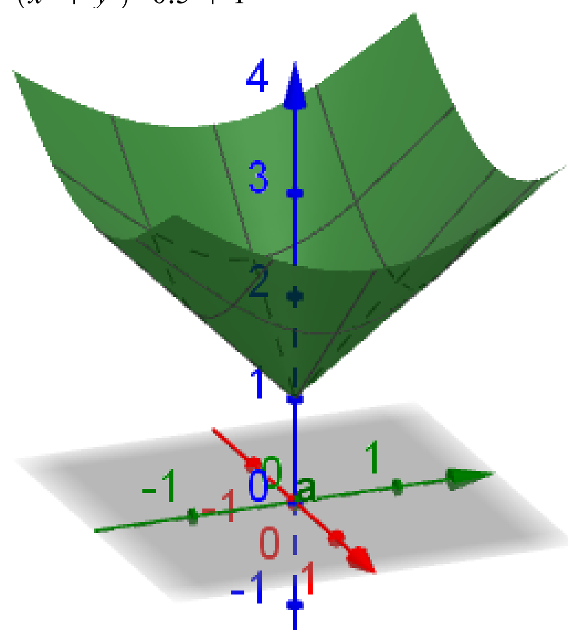
Grafen er her tegnet i Maple

$plot3d\left(\sqrt{x^2 + y^2} + 1\right)$



Grafen er her tegnet i Geogebra. 3D grafik slås til og i kommandolinjen skrives:

$(x^2 + y^2)$^0.5 + 1



702

Opgaveformulering

En funktion er givet ved $f(x, y) = e^{y^2 - x^2}$

a. Bestem de partielle aflede.

b. Begrund at punktet P=(2,2,1) ligger på grafen.

c. Bestem en ligning for tangentplanen i P.

Besvarelse

Jeg definerer funktionen: $f(x, y) := e^{y^2 - x^2}$:

a)

og lader Maple beregne de partielle afledede:

x: $diff(f(x, y), x) = -2\,x\,e^{-x^2 + y^2} \xrightarrow{\text{assign to a name}} fx(x, y)$

y: $diff(f(x,y),y)$ $2\,y\,e^{-x^2+y^2} \xrightarrow{\text{assign to a name}} fy(x,y)$
b)
Jeg indsætter punktet i forskriften: $f(2,2) = 1$
Det giver 1, så det stemmer. Altså ligger P på grafen.

c)
Hvis jeg først definerer: $x_0 := 2:\ \ y_0 := 2:\ \ z_0 := 1:$
Vil Maple selv beregne tangentplanen ud fra dens generelle formel (196).

En ligningen for tangentplanen er:
$z = z_0 + fx(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + fy(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) = z = 1 - 4\,x + 4\,y$

703

Opgaveformulering

Der er givet forskriften $f(x,y) = \frac{1}{4}x^2y^2 + y^2 + x + 10$

a. Bestem de partielle afledede.
b. Bestem en ligning for tangentplanen i P=(1, 2, f(1,2)).
c. Tegn grafen for f og tangentplanen i samme plot.

Besvarelse

Jeg definerer funktionen: $f(x,y) := \frac{1}{4}x^2\cdot y^2 + y^2 + x + 10:$

a)
og lader Maple beregne de partielle afledede:

x: $diff(f(x,y),x)$ $\frac{x\,y^2}{2} + 1 \xrightarrow{\text{assign to a name}} fx(x,y)$

y: $diff(f(x,y),y)$ $\frac{1}{2}\,x^2\,y + 2\,y \xrightarrow{\text{assign to a name}} fy(x,y)$

b)
Hvis jeg først definerer: $x_0 := 1:\ \ y_0 := 2:\ \ z_0 := f(x_0, y_0) = 16$
Vil Maple selv beregne tangentplanen ud fra dens generelle formel (196).

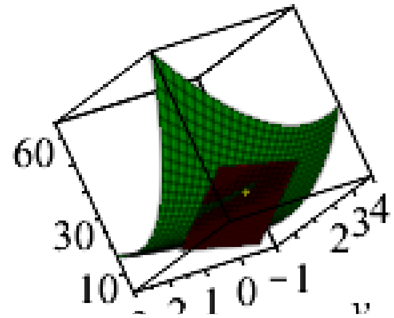
En ligningen for tangentplanen er:
$z = z_0 + fx(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + fy(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) \ = \ = z = 3 + 3\,x + 5\,y$

c)

Her ses graf for f(x,y) (grøn) og tangentplan (rød) og tangeringspunkt P (gul) i samme plot. *with(plots)* : $p := pointplot3d(\{[1, 2, 16]\}, color = [yellow], symbol = solidsphere,$	*plots[display](graph, tanPlane, p)*;

symbolsize = 20) :
graph := *plot3d*({ $f(x, y)$ }, x = -1 ..3, y = -1 ..4, *color* = *green*) :

tanPlane := *plot3d*({3 + 3 x + 5 y}, x = -0 ..2, y = -0 ..3, *color* = *red*) :



704

Opgaveformulering

Der er givet forskriften $f(x, y) = x^2 \cdot y - y^2 + x - 1$
a. Bestem gradienten i punktet P=(4,3).
b. Bestem en ligning for planen der tangerer f(x,y) i P.

Besvarelse

a)
Jeg definerer funktionen: $f(x, y) := x^2 \cdot y - y^2 + x - 1$:
og lader Maple beregne de partielle afledede:
x: $diff(f(x, y), x)$ $2\,x\,y + 1 \xrightarrow{\text{assign to a name}} fx(x, y)$
y: $diff(f(x, y), y)$ $x^2 - 2\,y \xrightarrow{\text{assign to a name}} fy(x, y)$

Gradienten i (4,3) er vektoren: $\langle fx(4, 3), fy(4, 3) \rangle = \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \end{bmatrix}$

b)
Hvis jeg først definerer: $x_0 := 4$: $y_0 := 3$: $z_0 := f(x_0, y_0)$:
Vil Maple selv beregne tangentplanen ud fra dens generelle formel (196).
En ligningen for tangentplanen er:
$z = z_0 + fx(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + fy(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = z = -88 + 25\,x + 10\,y$

705

Opgaveformulering

Funktionen $f(x, y) = 3\,x^3 + 3\,x \cdot y - 2\,y^2 + 1$ har to stationære punkter.
a. Bestem koordinaterne til dem, samt deres funktionsværdier.

Besvarelse

Jeg definerer funktionen: $f(x, y) := 3\,x^3 + 3\,x \cdot y - 2\,y^2 + 1$:
og lader Maple beregne de partielle afledede:
x: $diff(f(x, y), x)$ $9\,x^2 + 3\,y \xrightarrow{\text{assign to a name}} fx(x, y)$

y: $diff(f(x,y),y)$ $3x-4y \xrightarrow{\text{assign to a name}} fy(x,y)$

I stationære punkter er begge de partielle afledede 0, så jeg løser:

$solve([fx(x,y)=0, fy(x,y)=0]) = \left\{x=-\frac{1}{4}, y=-\frac{3}{16}\right\}$

Så de to stationære punkter har koordinaterne $(0,0)$ *og* $(-0.25, -0.1875)$.

og deres funktionsværdier er $f(0,0)=1$ og $f(-0.25,-0.1875)=1.02343750$

706

Opgaveformulering

En funktionen har forskriften $f(x,y)=x^4+y^4-8x^2+8y^2$

a. Bestem de partielle afledede.

b. Find de stationære punkter.

c. Tegn grafen og afgør ved inspektion typen af de stationære punkter.

Besvarelse

Jeg definerer funktionen $f(x,y) := x^4+y^4-8x^2+8y^2$:

og lader Maple beregne de partielle afledede:

x: $diff(f(x,y),x)$ $4x^3-16x \xrightarrow{\text{assign to a name}} fx(x,y)$

y: $diff(f(x,y),y)$ $4y^3+16y \xrightarrow{\text{assign to a name}} fy(x,y)$

b)

I stationære punkter er begge de partielle afledede 0, så jeg løser:

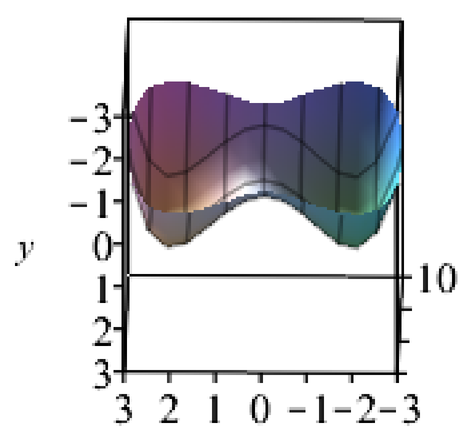
$solve([fx(x,y)=0, fy(x,y)=0]) = \{x=-2, y=0\}, \{x=2, y=0\}, \{x=0, y=0\}$

c)

<table>
<tr>
<td>Jeg plotter funktionen og vælger relevante værdier på akserne, for at kunne se de stationære punkter.

For at vide hvad jeg skal vælge på z-aksen beregner jeg funktionsværdien i de stationære punkter:
$f(-2,0)=-16$, $f(2,0)=-16$, $f(0,0)=0$

Jeg kan nu se på figuren:
at der er minimum i punkterne (-2,0) og (2,0)

og saddel i (0,0).</td>
<td>$plot3d(f(x,y))$
</td>
</tr>
</table>

707

Opgaveformulering

En funktion af to variable er givet ved $f(x, y) = x^4 - 2\,xy + y^4$

a. Bestem $\frac{d}{dx} f$ og $\frac{d}{dy} f$

Grafen har 3 stationære punkter.

b. Bestem typen for hvert af dem ved beregning.

Besvarelse

Jeg definerer funktionen: $f(x, y) := x^4 - 2\,x \cdot y + y^4$:

og lader Maple beregne de partielle afledede:

$$\frac{d}{dx} f(x, y) = 4\,x^3 - 2\,y \xrightarrow{\text{assign to a name}} dfx(x, y)$$

$$\frac{d}{dy} f(x, y) = 4\,y^3 - 2\,x \xrightarrow{\text{assign to a name}} dfy(x, y)$$

I stationære punkter er begge de partielle afledede 0, så jeg løser:

$$solve([dfx(x, y) = 0, dfy(x, y) = 0]) = \left\{x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, \left\{x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Typen af de stationære punkter kan ses via grafen, afgøres via værdierne af de 2. ordens partielle aflede i punkterne. Dem kan vi i dette tilfælde klare med hovedregning og opskrive dem direkte.

$f_{xx}'' = 12\,x^2$ og $f_{xy}'' = -1$ og $f_{yy}'' = 12\,y^2$

Nu kan vi indsætte koordinater for de respektive punkter og let beregne r, t og s:

I punktet (0,0) er (r, s, t) = (0, -1, 0) så $r \cdot t < s^2$ altså er der saddelpunkt.

I punkterne $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ og $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ har de 2.ordens afledede samme værdi, nemlig:

(r, s, t) = (6, -1, 6) så $r \cdot t > s^2$ og da både r og t er positive er er der minimum.

708

Opgaveformulering

En funktion er givet ved $f(x, y) = 3 \cdot \sqrt[3]{x^4 - y^2 + 1}$

Bestem gradienten i (-2,3).

Undersøg om f har stationære punkter og bestem i givet fald deres type.

Besvarelse

a)

Jeg definerer funktionen: $f(x, y) := 3 \cdot \sqrt[3]{x^4 - y^2 + 1}$: og bestemmer de partielle afledede:

x: $diff(f(x,y),x)$ $\dfrac{4x^3\sqrt[3]{x^4-y^2+1}}{x^4-y^2+1} \xrightarrow{\text{assign to a name}} fx(x,y)$

y: $diff(f(x,y),y)$ $-\dfrac{2y\sqrt[3]{x^4-y^2+1}}{x^4-y^2+1} \xrightarrow{\text{assign to a name}} fy(x,y)$

Gradienten i (-2,3) er vektoren: $\langle fx(-2.,3), fy(-2.,3)\rangle$ $\begin{bmatrix} -8.000000000 \\ -1.500000000 \end{bmatrix}$

b)

De partielle afledede er begge brøker. De er kun 0 når nævneren er 0, dvs hvis både x og y er 0.

(hvis indholdet under kvadratroden er 0, er tælleren også 0, men i givet fald er nævneren det også, og så er brøken slet ikke defineret, dvs funktionen er slet ikke differentiabel når $x^4-y^2+1=0$.)

Så der kun et stationært punkt i (0,0).

c)

Jeg lader Maple beregne 2. ordens partielle aflede:

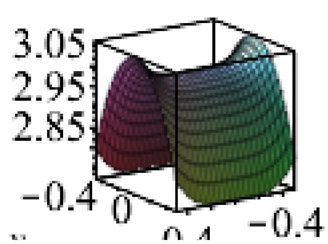
xx: $diff(f(x,y),x,x) = -\dfrac{32x^6}{3(x^4-y^2+1)^{5/3}} + \dfrac{12x^2}{(x^4-y^2+1)^{2/3}} \xrightarrow{\text{assign to a name}} r(x,y)$

xy: $diff(f(x,y),x,y) = \dfrac{16x^3y}{3(x^4-y^2+1)^{5/3}} \xrightarrow{\text{assign to a name}} s(x,y)$

yy: $diff(f(x,y),y,y) = -\dfrac{8y^2}{3(x^4-y^2+1)^{5/3}} - \dfrac{2}{(x^4-y^2+1)^{2/3}} \xrightarrow{\text{assign to a name}} t(x,y)$

<table>
<tr>
<td>Deres værdier i det stationære punkt er:

$r(0,0)=0$ $s(0,0)=0$ $t(0,0.)=-2.00$.
Da $r \cdot t - s^2$: er lig 0 i (0,0) , kan vi ikke bruge vores regler til at afgøre typen.

Men laver vi et plot, kan vi se at det stationære punkt er et saddelpunkt.</td>
<td>$plot3d(f(x,y), x=-0.5..0.5, y=-0.5..0.5)$
</td>
</tr>
</table>

#11.mw

$with(Gym)$:

801

Opgaveformulering

Vi ser på vektorfunktionen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t+4 \\ t^2+2t-3 \end{pmatrix}$ $-5 \le t \le 5$.

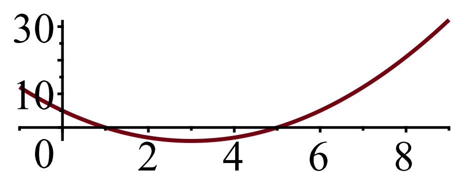
a. Tegn grafen med et værktøj.

b. Bestem en ligning for kurven i xy-planen.

Besvarelse

Først definerer jeg koordinatfunktionerne:

$x(t) := t+4$: $y(t) := t^2+2t-3$: og vektorfunktionen: $r(t) := \langle x(t), y(t)\rangle$:

a) Jeg plotter og bruger 'manipulator' til at zoome ind på et område, der forekommer relevant.	$plot([x(t), y(t), t=-5..5])$ 

b)

Isoleres t i paramterfunktionen for x: $x = x(t) \xrightarrow{\text{isolate for t}} t = x-4$

En ligning for grafen fås ved at indsætte dette i y(t): $y = y(x-4) = \xrightarrow{\text{simplify symbolic}}$

$y = x^2 - 6x + 5$

802

Opgaveformulering

Stedvektoren til et punkt P er givet ved $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t^2-5 \\ 2t+3 \end{pmatrix}$

a. Tegn grafen.

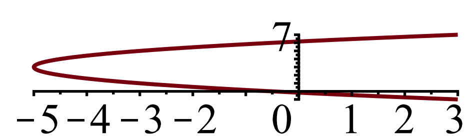
b. Bestem hastighedsfunktionen r'(t).

c. Angiv røringspunkt og ligning for den lodrette tangent.

Besvarelse

Først definerer jeg kordinatfunktionerne:

$x(t) := 2t^2-5$: $y(t) := 2t+3$: og vektorfunktionen: $r(t) := \langle x(t), y(t)\rangle$:

a) Jeg plotter og bruger 'manipulator' til at zoome ind på et relevant område, hvor skæringerne ses.	$plot([x(t), y(t), t=-2..2])$ 

b)

Hastighedsfunktionen r'(t) lader jeg Maple beregne : $r'(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 2 \end{bmatrix}$

c)
Paramterværdien hvor der er lodret tangent findes ved at løse x'(t)=0. Det ses at løsningen er t=0.

Røringspunktet P, for tangenten findes ved at indsætte t=0 i r(t): $P = r(0) = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

Ligningen for den lodrette tangent er så: x=-5.

803

Opgaveformulering

En vektorfunktion har parameterfremstillingen:

$$x = 5 - 2t$$
$$y = 8 - 2t^2$$

a. Bestem koordinaterne til skæringerne med både x- og y-aksen.
b. Bestem en ligning for kurven i xy-planen.
c. Tegn grafen.

Besvarelse

Først definerer jeg koordinatfunktionerne:

$x(t) := 5 - 2t$: $\quad y(t) := 8 - 2t^2$: $\quad$ og vektorfunktionen: $f(t) := \langle x(t), y(t) \rangle$:

a)
På x-aksen er y 0, så y(t) sættes lig 0: $y(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = -2\}, \{t = 2\}$
x-koordinaterne findes ved at indsætte de funde paramtværdier i x(t):
$x(-2) = 9$ og $x(2) = 1$
Koordinaterne til skæringspunkterne på x-aksen er dermed: (9, 0) og (1, 0) .

På y-aksen er x 0, så x(t) sættes lig 0: $x(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} 2.500000000$
y-koordinaten findes ved at indsætte den funde paramtærdi i y(t): $y(2.5) = -4.50$
Koordinaterne til skæringspunkt på y-aksen er dermed: (0, -4,5) .

b)
Isoleres t i koordinatfunktionen x(t): $x = 5 - 2t \xrightarrow{\text{isolate for t}} t = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$

En ligning for kurven fås ved at indsætte dette i y(t): $y = y\left(-\frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right) = \xrightarrow{\text{simplify symbolic}}$

$y = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2}x^2 + 5x$

c)
Jeg plotter og bruger 'manipulator' til at zoome ind på det relevante område, hvor skæringerne ses.

$plot([x(t), y(t), t = -10..10])$

804

Opgaveformulering

En kurve er givet ved parameterfremstillingen:

$$(x, y) = \left(\frac{t^2}{t-1}, \frac{t}{t-1}\right) \; t \neq 1$$

a. Bestem parameterværdierne til de punkter, hvor der er lodret tangent.
b. Bestem koordinaterne til røringspunkterne for de lodrette tangenter.
c. Tegn kurven og brug svarene fra a. og b. til at zoome ind i et område hvor røringspunkterne er med.

Besvarelse

Først definerer jeg koordinatfunktionerne:

$$x(t) := \frac{t^2}{t-1} : \quad y(t) := \frac{t}{t-1} :$$ og vektorfunktionen: $r(t) := \langle x(t), y(t) \rangle$:

a)

Paramterværdier hvor der er lodret tangent findes ved at løse x'(t)=0:

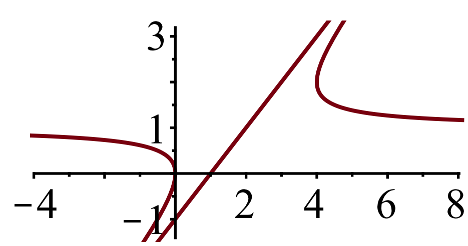
$intervalsolve(x'(t) = 0, t = -100 ..100) = [0, 2]$

b)

Koordinaterne til røringspunkterne, for de lodrette tangenter findes ved at indsætte de fundeværdier i r(t):

$$r(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } r(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c)

Jeg ved at jeg skal plotte grafen i et interval der indeholder [0;2]. Jeg forsøger med [-5;7]. Herefter skal jeg zoome ind således at området fra 0 til 4 på x-aksen og 0 til 2 på y-aksen er med. I Maple bruger jeg 'manipulator' og zommer flere gange, for at få grafen til højre.	$plot([x(t), y(t), t = -5 ..7])$ 

(11.4.2.1)

805

Opgaveformulering

Vektorfunktionen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t - 2\sin(t) \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$ er defineret i $-\pi \leq t \leq \pi$

a. Bestem røringspunkter for de lodrette tangenter.
b. Bestem røringspunkter for den vandrette tangent.
c. Bestem koordinaterne til grafens dobbeltpunkt.

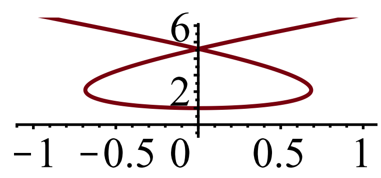
Besvarelse

Først definerer jeg koordinatfunktionerne:
$x(t) := t - 2\sin(t)$: $y(t) := t^2 + 1$:

og vektorfunktionen: $r(t) := \langle x(t), y(t) \rangle$:

For overblikkets skyld plotter jeg grafen og bruger 'manipulator' til at zoome ind på et område, med relevante karakteristika.

$plot([x(t), y(t), t=-\pi..\pi])$



a)

Lodrette tangent er der når x'(t)=0: $intervalsolve(x'(t) = 0, t = -\pi..\pi) = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

Røringspunkterne, for de lodrette tangenter findes ved at indsætte løsningerne i r(t):

$P1 = r\left(-\frac{\pi}{3.0}\right) = \begin{bmatrix} 0.6849 \\ 2.0966 \end{bmatrix}$ og $P2 = r\left(\frac{\pi}{3.0}\right) = \begin{bmatrix} -0.6849 \\ 2.0966 \end{bmatrix}$

b)

Paramterværdier hvor der er vandret tangent findes ved at løse y'(t)=0: Det ses, at løsningen er t=0.

Røringspunktet, for den vandrette tangent er så : $r(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

c)

Et dobbeltpunkt betyder at 2 forskellige parameterværdier p og q medfører samme x og y-kooordinat.
Dvs vi har ligningssystemet: x(p)=x(q) og y(p)=y(q).

Da y(t) er $t^2 + 1$, kan vi kun få samme y-værdi hvis p=-q, så første ligning bliver:
$x(p) = x(-p)$:

$intervalsolve(x(p) = x(-p), p = -\pi..\pi) = [-1.895494267, 0, 1.895494267]$

Værdien 0 kasseres fordi plus og minus 0 er det samme, så der er ikke tale om et dobbeltpunkt
.

Koordinaterne til dobbeltpunktet P bestemmmes ved at indsætte en af de andre værdier i r(t):

$P = r(1.895494267) = \begin{bmatrix} 0. \\ 4.592898516 \end{bmatrix}$

806

Opgaveformulering

En vektorfunktion har fremstillingen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2 \\ t^3 - 3t \end{pmatrix}$

a. Bestem evt. lodrette tangenter.
b. Bestem evt. vandrette tangenter.
c. Grafen har et dobbeltpunkt. Bestem dets koordinater.

Besvarelse

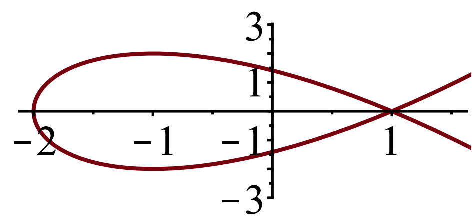
Først definerer jeg koordinatfunktionerne:

$x(t) := t^2 - 2 : \; y(t) := t^3 - 3t :$

og vektorfunktionen: $r(t) := \langle x(t), y(t) \rangle :$

Jeg tegner også grafen for overblikkets skyld.

$plot([x(t), y(t), t = -5..5])$



a)
Paramterværdier hvor der er lodret tangent findes ved at løse $x'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$:
x-koodinaten hvor der er lodret tangent findes ved at indsætte t=0 i x(t): $x(0) = -2$.
Ligningen for den lodrette tangent er dermed x=-2.
b)
t-værdier for vandrette tangenter findes ved at løse $y'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$:
De y-koordinater hvor der er vandrette tangenter findes ved at indsætte de to løsninger i y(t):
$y(1) = = -2$ og $y(-1) = 2$
Ligningerne for de vandrette tangenter bliver dermed: y=-2 og y=2.

c)
Her bruger jeg sætningen fra bogen, se skærmklip:

I denne opgave er koeffiscienterne a0 = A0 = 1,
b= B=0 så C=-3. Det indsættes i formlen:

$$q = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{Bb - C - \frac{3}{4}b^2} =$$
$$\pm\sqrt{-(-3)}$$

Koordinatættet til røringspunktet P, findes ved at indsætte

en af værdierne i r(t): P=$r(\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Det ses at stemme med grafen.

Sætning
Når koordinatfunktionerne til en vektorfunktion er henholdsvis et 2.grads- og et 3.gradspolynomium, dvs på formen:

$$a_0t^2 + b_0t + c \qquad og \quad A_0t^3 + B_0t^2 + C_0t + D$$

er de to parameterværdier til et evt dobbeltpunkt:

$$q = -\tfrac{b}{2} \pm \sqrt{Bb - C - \tfrac{3}{4}b^2}$$

hvor $b = b_0/a_0$, $B = B_0/A_0$ og $C = C_0/A_0$

Vi bemærker at der ikke altid findes dobbeltpunkter, udtrykket under kvadratroden skal være ikke-negativt. Men hvis der er et, så er summen af de to parameterværdier er p+q = -b.

Denne opgaves vektorfunktion:

$$r(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 2 \\ t^3 - 3t \end{bmatrix}$$

807

Opgaveformulering

Givet vektorfunktionen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t - 3 \\ t^3 - 3t + 4 \end{pmatrix}$.

a. Den ene parameterværdi til dobbeltpunktet er 2, hvad er den anden?
b. Bestem den spidse vinkel mellem tangenterne i dobbeltpunktet.
c. Bestem en ligning for den af tangenterne der *ikke* er vandret.

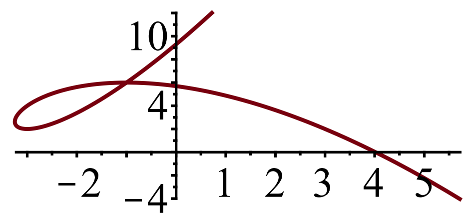
Besvarelse

Først definerer jeg koordinatfunktionerne:

$x(t) := t^2 - t - 3 :$
$y(t) := t^3 - 3t + 4 :$

og tegner grafen for overblikkets skyld.

$plot([x(t), y(t), t=-2.5 .. 2.5])$



a)
Vi ved fra sætningen i bogen om dobbeltpunkter til polynomielle vektorfunktioner, at summen af de to parameterværdier p og q i dobbeltpunktet lagt sammen skal give -b, hvor b er

$\frac{b_0}{a_0} = \frac{-1}{1} = -1 :$ *

Summen af p og q er altså 1, og da p er 2, er den anden paramterværdi -1.

*(hvor a_0 *og* b_0 er koeffiscienterne til anden og førstegradsleddet i andengradspolynomiet.)

b)
En tangent i et punkt på kurven har retningsvektoren $v(t) := \langle x'(t), y'(t) \rangle$:

Retningsvektorerne i p og q er så: $v2 := v(2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$ og $v1 := v(-1) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vinklen mellem disse 2 vektorer kan bestemmes ved: $vinkel(v2, v1) = 108.4349488$
Den *spidse* vinkel mellem tangenterne er så $180 - 108.43 = 71.57$ grader.

c)

Hældningen af den tangent der ikke er vandret er: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9}{3} = 3 :$

Punktet hvor den tangerer er: $f(2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$. Så er b-værdien $y_1 - a \cdot x_1 = 6 - 3 \cdot (-1) = 9$

En ligning for tangenten er altså: $y = 3x + 9 :$

808

Opgaveformulering

En cirkel har parameterfremstillingen :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 5 \cdot \cos(t) \\ 3 + 5 \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

a. Angiv koordinaterne til cirklens centrum.
b. tegn cirklen med et værktøj.
Cirklen har to tangenter, der hvor den skærer x-aksen.
b. Bestem en parameterfremstilling for hver af disse tangenter.
c. Bestem de vinkler disse tangenter danner med x-aksen.

Besvarelse

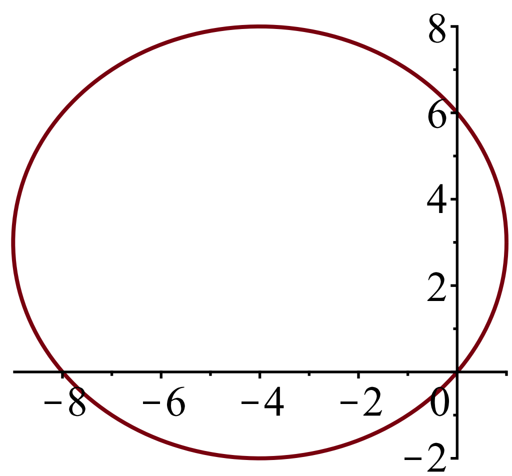
a)
Centrum aflæses i forskriften til (-4, 3)

a)
Først definerer jeg koordinatfunktionerne:

$x(t) := -4 + 5\cos(t)$: og
$y(t) := 3 + 5\sin(t)$:

og vektorfunktionen:
$f(t) := \langle x(t), y(t) \rangle$:

$plot([x(t), y(t), t = 0..2\pi])$



b)
Parameterværdierne for skæring med x-aksen bestemmes ved at løse y(t)=0:

$$intervalsolve(y(t) = 0, t = 0..2\pi) = \left[\pi + \arctan\left(\frac{3}{4}\right), 2\pi - \arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right] \xrightarrow{\text{assign to a name}} tx$$

og **x-koordinaterne** er så: $x(tx[1]) = -8$ og $x(tx[2]) = 0$

En tangent i et punkt på kurven har retningsvektoren $\langle x'(t), y'(t) \rangle = \begin{bmatrix} -5\sin(t) \\ 5\cos(t) \end{bmatrix}$

I de to skæringer med x-aksen er **retningsvektorerne** derfor:

$$\begin{bmatrix} -5\sin(tx[1]) \\ 5\cos(tx[1]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -5\sin(tx[2]) \\ 5\cos(tx[2]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vi kender nu både et punkt på tangenterne og deres retningsvektorer så parameterfremstillingerne for tangenterne er:

$\langle x, y\rangle = \langle -8, 0\rangle + t\cdot\langle 3, -4\rangle = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8+3\,t \\ -4\,t \end{bmatrix}$ og $\langle x, y\rangle = \langle 0, 0\rangle + t\cdot\langle 3, 4\rangle = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\,t \\ 4\,t \end{bmatrix}$

Vinklen mellem tangenterne og x-aksen findes ved formlen: $a = \tan(v) \Leftrightarrow v = invtan(a)$:

$v1 = invTan\left(\frac{4}{3}\right) = v1 = 53.13010234$ og $v2 = invTan\left(\frac{-4}{3}\right) = v2 = -53.13010234$

#12.mw

$with(Gym)$:

901

Opgaveformulering

En stokastisk variabel X har følgende værdier og tilhørende sandsynligheder.

$X = x_i$	2	4	6	8	10
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,1	0,3	0,3	

a. Bestem $P(X = 10)$ og $P(X \leq 6)$.
b. Bestem middelværdien af X.
c. Bestem spredningen for X.

Besvarelse

a)

$P(X = 10) = 1 - 0.1 - 0.1 - 0.3 - 0.3 = 0.2$ $\quad P(X \leq 6) = 0.1 + 0.1 + 0.3 = 0.5$

b)

Middelværdien er $\mu := 0.1\cdot 2 + 0.1\cdot 4 + 0.3\cdot 6 + 0.3\cdot 8 + 0.2\cdot 10 = 6.8$

c)

$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot(x_i - \mu)^2}$ så spredningen er:

$\sqrt{0.1\cdot(2-\mu)^2 + 0.1\cdot(4-\mu)^2 + 0.3\cdot(6-\mu)^2 + 0.3\cdot(8-\mu)^2 + 0.2\cdot(10-\mu)^2}$ 2.40

902

Opgaveformulering

Du er blevet lokket til at spille et spil med 3 almindelige terninger.
Hvis du får 3 seksere vinder du 10kr.
Hvis du får 2 seksere vinder du 4kr.
I alle andre tilfælde taber du en krone.

a. Hvor meget vinder/taber du i gennemsnit per spil?
b. Hvad skal gevinsen være ved 3 seksere for at spillet balancerer, dvs den gennemsnitlige gevinst er 0kr?

Besvarelse

a)

Antallet af seksere er binomialfordelt, $Y \sim b\left(3, \frac{1}{6}\right)$.

Sandsynligheden for 3 seksere er dermed $\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

Sandsynligheden for netop 2 seksere er $3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3-2} = \frac{5}{72}$

Sandsynligheden for 0 eller 1 seksere er dermed $1 - \frac{5}{72} - \frac{1}{216} = \frac{25}{27}$

Vi kan nu opfatte gevinsten som en stokastisk variabel X med følgende sandsynligheder.

Antal seksere	0 eller 1	2	3
Gevinst $X = x_i$	-1	4	10
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{25}{27}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

Gennemsnitsgevinsten i spillet er så middelværdien af X: $-1 \cdot \frac{25}{27} + 4 \cdot \frac{5}{72} + 10 \cdot \frac{1}{216} =$

$-\frac{65}{108}$

b)

Spillet balancerer når gennemsnitet er 0, så jeg løser ligningen:

$-1 \cdot \frac{25}{27} + 4 \cdot \frac{5}{72} + x \cdot \frac{1}{216} = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 140\}$

Gevinsten ved 3 seksere skal altså være 140kr for at spillet balancerer.

903

Opgaveformulering

Fra en krukke med 100 kugler, 40 røde og 60 blå trækkes med tilbagelægning 30 kugler.
Antallet af røde kugler blandt de 30 opfatter vi som en stokastisk variabel X.

a. Begrund at X er binomialfordelt.

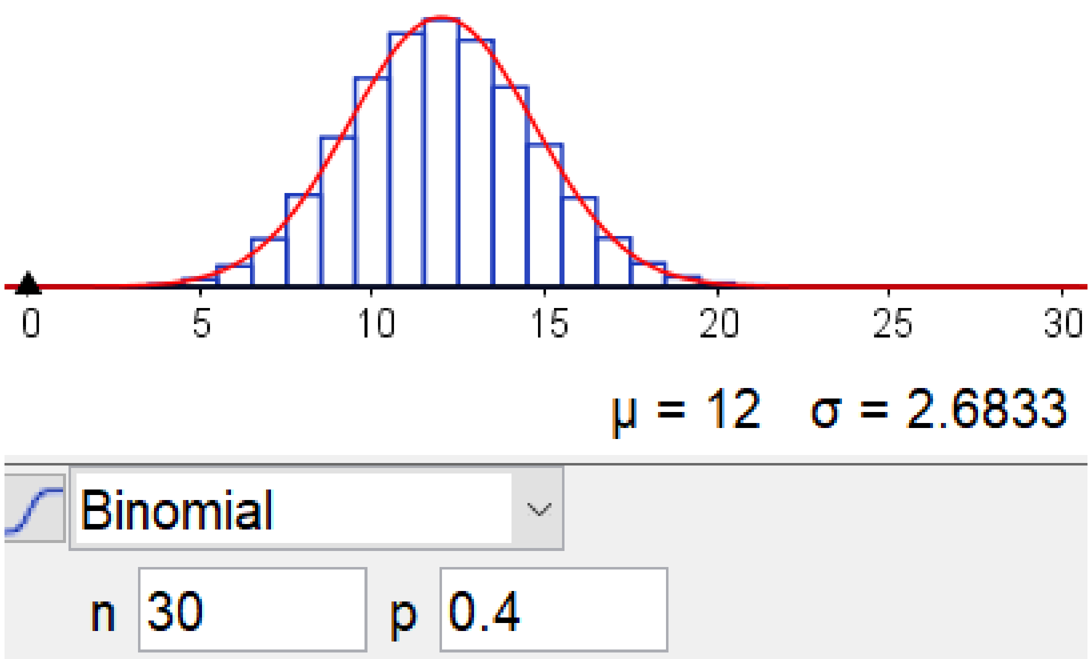
b. Bestem middelværdi og spredning.
c. Tegn normalfordelingsappoximationen i samme plot som som et pindediagram for X.
d. Er 6 et normalt udfald for X?
d. Er 21 et exceptionelt udfald for X?

Besvarelse

a)
Der er kun to muligheder ved hver trækning, vi forventer at de enkelte udfald er uafhængige og da der trækkes med tilbagelægning er sandsynligheden den samme hver gang. Dermed er X binomialfordelt.

b)
Sandsynligheden for succes/rød p, er i hvert udfald 40/100=0.4.
Da der trækkes 30 gange er n=30 og middelværdien er så $0.4 \cdot 30 = 12.0$
Spredningen for en binomialfordeling er $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{30 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = 2.683281573$

c)
Plottet kan let laves i Geogebra, via 'sandsynlighedslommeregneren'.



d)
Ifølge formelsamlingen ligger et 'normalt' udfald mindre end to standardafvigelser fra middelværdien.
6 er mindre end 12 - 2*2,68, så 6 er *ikke* et normalt udfald.

e)
Et 'exceptionelt' udfald er et der ligger længere end 3 standardafvigelse fra middelværdien.
21 er større en 12 +3*2,68 så 21 er et exceptionelt udfald.

904

Opgaveformulering

10 venner er samlet for at se splatterfilm da alt lyset i huset pludselig går ud. De trækker lod om hvem der skal gå ned i kælderen alene og skifte sikringer. Da hverken lyset eller den udsendte kommer tilbage gentager de processen 2 gange mere, med samme resultatet hver gang. En mener dog at høre nogle fjerne skrig.

a.
De beslutter derfor, at 3 skal udvælges blandt de overlevende for sammen at gå ned i kælderen. På hvor mange måder kan disse 3 personer udvælges?

b.
En af de resterende hedder Bo og en anden hedder Ib. Hvad er sandsynligheden for at både Bo og Ib er blandt de udvalgte, hvis der trækkes lod tilfældigt?

Besvarelse

a)
Antallet af måder man kan vælge 3 blandt de tilbageværende 7 er binomialkoefficienten:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 7\cdot5 = 35$$

b)
Hvis både Bo og Ib er med i gruppen på 3 er der 5 muligheder for at vælge den sidste person. Udvalget kan altså sammensættes på 5 måder når både Bo og Ib er med.

Da der i alt var 35 mulige udvalg, er sandsynligheden for at de begge er med $\frac{5}{35} = \frac{1}{7}$

905

Opgaveformulering

På en pølsefabrik udtages en stikprøve på 80 pølser. Det viser sig at saltindholdet er for højt i 18 af dem.

Bestem et 95% konfidensinterval for stikprøveandelen.

Besvarelse

Formel 255 fra formelsamlingen benyttes: $\left[\hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\ ;\ \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right]$

Antalsparamteren n er 80 og stikprøvenandelen er $\frac{18.}{80} = 0.2250000000 \xrightarrow{\text{assign to a name}} p$

Dette indsættes $\left[p - 2\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{80.}}, p + 2\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{80.}}\right] =$
$[0.1316257530, 0.3183742470]$

Konfidensintervallet for stikprøveandelen er altså [0,132; 0,318].

Man kan også regne det ud direkte (og mere korrekt) med en kommando fra Gympakken:

konfidensInterval(18, 80, 0.95) = [0.133495, 0.316505]

906

Opgaveformulering

Der er givet datasættet
$X := \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 \rangle$:
$Y := \langle 0.008, 0.033, 0.074, 0.130, 0.204, 0.294, 0.522, 0.816 \rangle$:

a) Bestem forskriften for den linære funktion der bedst modellerer datasættet.

b) Bestem residualerne og lav et residualplot.
Vurder om der ser ud til at være systematik i residualerne.

c) Bestem residualspredningen.

d) Bestem et 95% koeffidensinteval for hældnings-estimatet i modellen.

e) Vis på en figur normalfordelingstilnærmelsen til residualerne.
Kommenter om du på den bagrund af figuren kan vurdere om residualerne er tilnærmelsesvis normalfordelte.

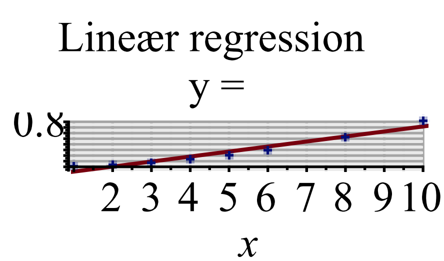
Besvarelse

a)

<table>
<tr>
<td>Først defineres 2 lister med data, og herefter bruges kommandoen LinReg fra Gym-pakken:

$X := \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 \rangle$:
$Y := \langle 0.008, 0.033, 0.074, 0.130, 0.204, 0.294, 0.522, 0.816 \rangle$:

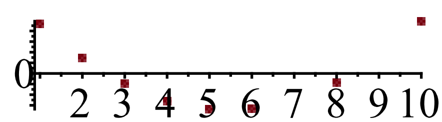
Det aflæses på figuren at forskriften er:
$f(x) = 0.0893\,x - 0.175$</td>
<td>*LinReg*(*X*, *Y*)


</td>
</tr>
</table>

b)

<table>
<tr>
<td>I Maple bruges kommandoen:
R := *residualer*(*X*, *Y*, *LinReg*)(.., 2) :
(Jeg har valgt ikke at skrive dem ud her).

På plottet til højre ser der i høj grad ud til at være en systematik i residualerne.</td>
<td>*plot*(*X*, *R*, *style* = *point*)


</td>
</tr>
</table>

c)
Residualspredningen bestemmes ved: *standardafvigelse*(*R*, *est* = 2) = 0.072630
d)
Koeffidensinterval for hældningen a er en del af output fra Maple kommandoen:

testLin(*X*, *Y*, *konfidens* = 0.95)

	a	b
Koefficient	0.089266	-0.175046
Standardfejl	0.009017	0.050910
t-stat	9.899352	-3.438341
p-værdi	0.000061	0.013829
Nedre 95.00%	0.067201	-0.299618
Øvre 95.00%	0.111330	-0.050474
Frihedsgrader	6	

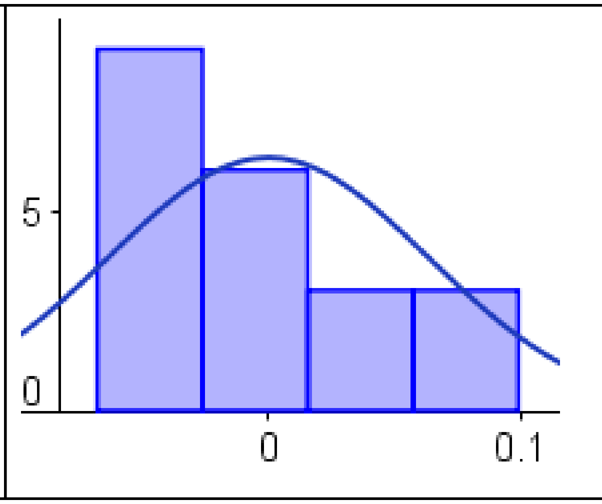
Det aflæses at 95% konfidensintervallet for a er: [0, 0672; 0, 1113]

e)

Under alle omstændigheder vil det være meget svært at sige noget om fordelingen med kun 8 datapunkter. Men metoden demonstreres.

Residualerne indskrives i Geogerbras regneark, jeg laver et histogram,og slår normalfordelingsfit til, (blå kurve).

Det er meget tydligt at histogrammet på ingen måde ligner en gaussklokke, så der er intet belæg for at sige af residualerne er normalfordelte.



907

Opgaveformulering

Som 11 årig barn henning med luftgevær hjemme i haven når hans forældre ikke var hjemme. Han skød på en afstand af 12m efter tomme dåser med flåede tomater. Da han var i storform ramte han i snit 74 ud af 100 gange.
Da hans mor opdagede det gemte hun luftgeværet et hemmeligt sted.

Senere da Henning var 18 fandt han en dag luftgeværet blandt det storskrald hans mor havde sat ud. Resolut gik han om i haven for at skyde igen. Han skød efter samme type dåser på samme afstand, men kun 37 gange, idet han løb tør for hagl.

Måske var han blevet bedre, fordi han var ældre og han motorik generelt var udviklet. På den anden side var han ude af træning, og blev jævnligt distraheret af naboens Ilse der tog solbad. Så måske var han alt i alt dårligere. Vi ved det ikke med sikkerhed, kun at han ramte rigtigt 23 gange.

a)

Formuler en nulhpotese angående Hennings skydefærdighed.

b) Bestem acceptmængden for antallet af pletskud på et 5%-niveau.

c) Bestem også den kritiske mængde.

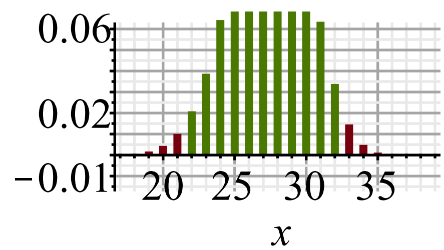
d) Hvor højt et signifikansniveau skal der til for at forkaste nulhypotesen?

Besvarelse

a)

Da der både er mulighed for at han kan være blevet bedre og dårligere, skal vi lave en tosidig test, og nulhypotesen er : Hennings evner som skytte er uændrede.

b)

Da han enten rammer eller misser, bruger vi binomialfordelingen som model. Sandsynlighedsparameteren er $p := 0.74$: Antalsparamteren er $n := 37$: I Maple kan testen udføres med kommandoen: På figuren kan vi se via de grønne pinde at acceptmængden er intervallet [22; 32].	$binomialTest(n, p, 0.05, tosidet)$ 

c)

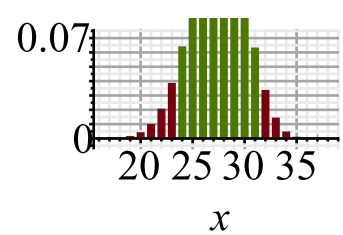
Den kritiske mængde er så komplementærmængden dvs.: [0;21]∪[33;37]

d)

Hvis nulhypotesen skal forkastes, skal 23 lande i den kritiske mængde. Vi beregner derfor sandsynligheden for at få 23 *eller færre* pletskud. Dvs P(X≤23).

Det kan gøres i Maple med kommandoen: $bincdf(n, p, 23) = 0.07657483471$

Da testen er tosidig, ligger kun halvdelen af sandsynligheden på venstre side af den kritiske mængde. Så signifikansniveauet skal være det dobbelte, altså ca 15%, for at hypotesen forkastes.

KOMMENTAR. Den kritiske mængde udgøres af de to røde 'haler' i fordelingen. De har normalt ikke helt samme sandsynlighedsmasse. Men vi kan prøve os frem, ved at gentage testen mens vi gradvis hæver signigfikansniveuaet. Det viser sig at tallet 23 lige netop falder over ud i den kritiske mængde, når signifikansnivauet når 15,4%.	$binomialTest(n, p, 0.154, tosidet)$ 

908

Opgaveformulering

Lungehindekræft er en sjælden sygdom, hvor en af de få kendte årsag er asbestfibre. Tidligere naboer til Dansk Eternit i Ålborg har tilsyneladende en markant forhøjet risiko for at få sygdommen. Asbest produktionen er forbudt for længst, men det tager typisk 40 år før man

bliver syg.
I Danmark er der 140 nye tilfælde om året.
Kilde: DR.dk 14. marts 2019 af Thea Deleuran Müller, Karen Sigrid Jacobsen og Gitte Olsgaard

Man ved ikke hvad baggrundsfrekvensen er for lungehindekræft, dvs sandsynligheden for at få det, selv om man ikke har været udsat for asbest. Men for opgavens skyld sættes den til $2 \cdot 10^{-5}$ per år.

a)
Vi vil gerne undersøge om asbest (eller andet ukendt) har ført til en højere forekomst af sygdommen i danmark. Formuler en relevant nulhypotese.

b) Bestem sandsynligheden for at se 140 tilfælde eller mere om året begrundet via baggrundsfrekvensen.

c) Kan nulhypotesen forkastes på et 1% signifikansniveau?

Besvarelse

a)
Nulhypotesen er at: sandsynligheden for at en tilfældig dansker får lungehindekræft er ikke større end baggrundsfrekvensen på $2 \cdot 10^{-5}$.
Da vi kun undersøger muligheden for en *forhøjet* risiko, skal der laves en en *ensidig* test.

b)
Da man enten kan få sygdommen eller ej, er der to udfald, og vi gætter på at situationen kan beskrives ved en normalfordeling. Det forudsætter at udfaldende er uafhængige, og det regner vi med, da det ikke smitter. Desuden skal alle have samme sandssynlighed for at få det.Vi ved faktisk ikke om det er rigtigt, måske er nogle mere arveligt disponerede end andre. Men for at kunne regne på det, gør vi den antagelse at sandsynligheden er den samme for alle.

Sandsynlighedsparameteren er $p := 2 \cdot 10^{-5}$:
Antalsparameteren er $n := 5.75 \cdot 10^{6}$:
Antallet er successer vi vil teste på er $r := 140$:

Det vi skal undersøge er sandsynligheden for at opleve antallet af syge er 140 eller højere dvs $P(X \geq 140) = 1 - P(X \leq 139)$, når p og n har de given værdier.
Den kummulerede binomialfordeling kan i Maple beregnes ved: bincdf(n,p,r).

Så sandsynligheden for mindst 140 syge er: $1 - \mathit{bincdf}(n, p, r) = 0.0103803682$

c)
Sandsynligheden for at opleve det aktuelt observerede dvs 140 tilfælde, er altså lidt større end 1%, så vi kan lige akkurat ikke forkaste nulhypotesen på et 1% niveau.

#13.mw
1. del *uden* hjælpemilder. Må skrives i Maple, men skal regnes manuelt.

1001

Opgaveformulering

I en gymnasieklasse har 8 af eleverne tilkendegivet, at de vil stille op til et af skolens udvalg. Der skal vælges 3 elever til udvalget.

a) Bestem på hvor mange måder, man kan vælge disse tre elever.

Besvarelse

Da der ikke forskel på medlemmere i udvalget, spørges der til antallet af kombinationer:

$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 8\cdot7 = 56$

1002

Opgaveformulering

En linje *l* er bestemt ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathrm{R}.$$

a) Undersøg, om punktet $P(3,4)$ ligger på *l*.

b) Bestem en ligning for *l*.

Besvarelse

a)

Forudsætningen for at P ligger på l er at der findes et t der indsat giver koordinaterne (3,4). Det ses at hvis x-koordinaten skal stemme skal t være -1, da $6 - 1\cdot3 = 3$. Når t er -1 bliver y-koordinaten $2 - 1\cdot(-2) = 4$. Des ses at det stemmer, så P ligger på l.

b)

Vi kan aflæse at en retningsvektor for l er $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Derfor er den tværvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en normalvektor for l, og så ved vi at linjen har ligningen:

$2x + 3y + c = 0$. c kan bestemmes ved at indsætte det kendt punkt og løse mht til c:

$2\cdot3 + 3\cdot4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -18$.

Dvs en ligning for l er $2x + 3y - 18 = 0$.

1003

Opgaveformulering

Et andengradspolynomium f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

a) Løs andengradsligningen $f(x) = 0$.

b) Tegn grafen for f.

c) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0,3)$.

Besvarelse

a)

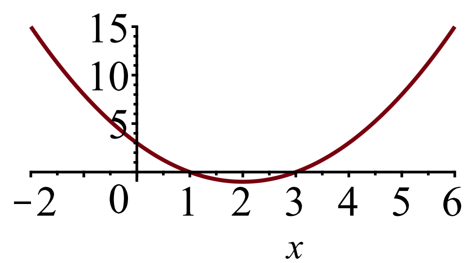
Vi kan indsætte i løsningsformlen der kan slås op i formelsamlingen. Det er helt OK.
Vi kan også gætte, og vi ved at når a=1 er produktet af rødderne lig c der her er 3 og deres sum er -b, der her er 4.
Hermed kan vi let se at rødderne er 1 og 3.

b)

x-koodinaten til toppunktet er $-\dfrac{b}{2\,a} = -\dfrac{-4}{2\cdot 1} = 2$, og y-koordinaten er så $2^2 - 4\cdot 2 + 3 = -1$.
Derudover bestemmer jeg $f(4) = f(0) = 3$ og
$f(5) = f(-1) = (-1)^2 - 4\cdot(-1) + 3 = 8$.

Hermed har jeg 7 støttepunkter og grafen kan nu tegnes (skitseres). (Jeg har brugt Maple)

$plot(x^2 - 4\,x + 3, x = -2\,..6)$



c)

Den afledte funktion f'(x) er 2x-4. Så f'(0) er -4. f(0) er 3. Disse værdier indsættes i:
Tangentens ligning $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow y = -4(x - 0) + 3) \Leftrightarrow y = -4\,x + 3$.

1004

Opgaveformulering

I et koordinatsystem er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5t-1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Forklar linje for linje nedenstående udregninger. Benyt eventuelt vedlagte bilag.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5t-1 \\ -3 \end{pmatrix} &= 0 \\ 3 \cdot (5t-1) + 2t \cdot (-3) &= 0 \\ 15t - 3 - 6t &= 0 \\ 9t &= 3 \\ t &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b) Forklar den geometriske betydning af den fundne løsning $t = \frac{1}{3}$ til ligningen $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Besvarelse

I første skridt indsættes de givne koordinater for vektoren $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
I næste skridt bruges definitionen på prikprodukt.
I næste skridt ganges ind i parenteserne under anvendelse af den distributive lov.
I næste skridt lægges 3 til på begge sider af lighedstegnet og 15t-6t reduceres til 9t.
I sidste skridt divideres med 9 på begge sider og brøken forkortes med 3.

1005

Opgaveformulering

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x^2 + 3x) \cdot \ln(x), \quad x > 0.$$

a) Bestem $f'(1)$.

Besvarelse

Først finder jeg den afledede funktion i det jeg bruger reeglen $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

$$f'(x) = (2x+3) \cdot \ln(x) + (x^2 + 3x) \cdot \frac{1}{x}$$

Herefter indsætter jeg 1: $f'(1) = (2 \cdot 1 + 3) \cdot \ln(1) + (1^2 + 3 \cdot 1) \cdot \frac{1}{1} = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4$

2. del *med* hjælpemidler
$with(Gym)$:

1006

Opgaveformulering

En linje l er givet ved ligningen

$$-5x+3y-9=0.$$

a) Bestem skæringspunktet mellem l og andenaksen.

b) Bestem den spidse vinkel mellem l og andenaksen.

Besvarelse

a)

Ligningen omskrives til formen ax+b: $-5\,x+3\,y-9=0 \Leftrightarrow y=\frac{5}{3}x+3$.

Skæringen med 2.aksen er i (0,b) dvs i (0,3).

b)

Hældningen a er 5/3 og vinklen mellem 1-aksen og linjen er $invTan(a)=invTan\left(\frac{5}{3}\right)$

59.03624349

Den er mindre end 90 grader, så det er den jeg er ude efter.

Den spidse vinkel mellem linjen og 2.aksen er så : (90-59,04) grader=30,96grader.

1007

Opgaveformulering

Tabellen viser værdierne for en stokastisk variabel X sammen med nogle af de tilhørende sandsynligheder.

$X=x_i$	3	7	11	20
$P(X=x_i)$	0,2	0,125	0,5	

a) Bestem $P(X=20)$.

b) Bestem middelværdi og spredning for X.

Besvarelse

a)
Summen af alle sandsynligheder skal give 1 så P(X=20) er $1 - 0.2 - 0.125 - 0.5 = 0.175$.
b)
Det er let at beregne middelværdien som den sandsynlighedsvægtede summen af alle værdier for X: $0.2 \cdot 3 + 0.125 \cdot 7 + 0.5 \cdot 11 + 0.175 \cdot 20 = 10.475$.

Man kan også bruge Maple, vi begynder med at definere en matrice med værdierne:

$$obs := \begin{bmatrix} 3 & 0.2 \\ 7 & 0.125 \\ 11 & 0.5 \\ 20 & 0.175 \end{bmatrix} : =$$

Herefter kan middelværdien beregnes ved: $middel(obs) = 10.4750000000000$
og spredningen ved: $spredning(obs)$ 5.35717976177765.

1008

Opgaveformulering

Vandstanden ved en sandbanke i Vadehavet afhænger af tidevandet. I en model kan vandstanden ved sandbanken som funktion af tiden beskrives ved

$$f(t) = 0{,}73 \cdot \sin(0{,}524 \cdot t + 4{,}71) + 0{,}73, \quad 0 \leq t \leq 24,$$

hvor $f(t)$ betegner vandstanden ved sandbanken (målt i meter) til tidspunktet t (målt i timer efter midnat).

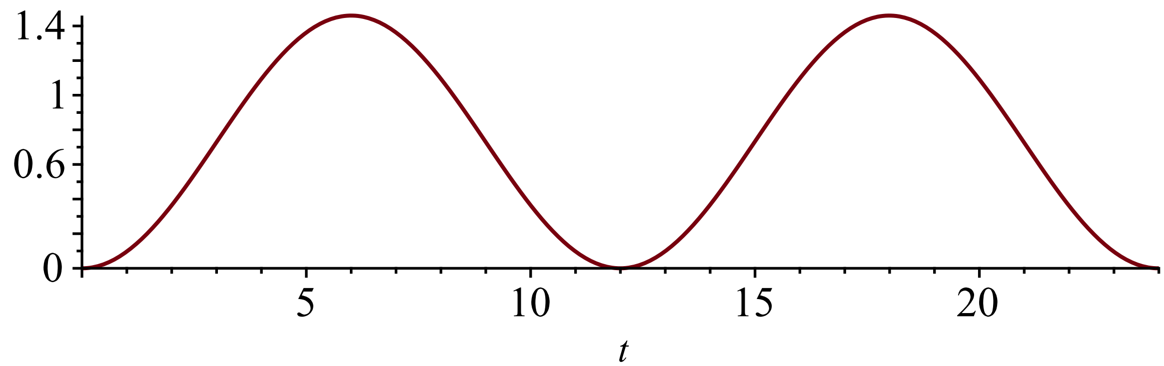
a) Tegn grafen for f.

På sandbanken kan der samles østers, når vandstanden er lavere end 0,2 m. En fisker starter en bestemt dag kl. 11.00 med at samle østers på sandbanken.

b) Bestem, hvor lang tid fiskeren kan samle østers, inden vandstanden igen overstiger 0,2 m.

Besvarelse

Først defineres funktionen: $f(t) := 0.73 \cdot \sin(0.524 \cdot t + 4.71) + 0.73$:
a)
Grafen tegnes med kommandoen: $plot(f(t), t = 0..24)$



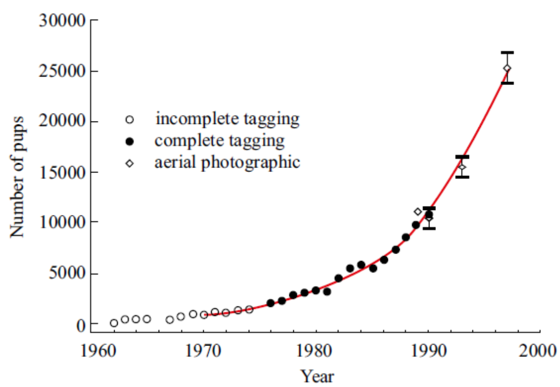
b)
Vi kan se på grafen at tidspunktet hvor vandstanden er 0,2 m må ligger lidt efter 12. Vi bruger derfor Maple kommandoen 'Numerically solve from point', med 13 som input:

$f(t) = 0.2 \xrightarrow{\text{solve}} 13.44244916$

Den tid fiskeren har til at fange østers er altså ca $13.44 - 11 = 2.44$ timer.

1009

Opgaveformulering



Optælling af gråsælunger på Sable Island ved Nova Scotia i Canada

Gennem en årrække har man på Sable Island hvert år optalt antallet af unger, som gråsæler fik. I en model kan udviklingen i antallet af gråsælers unger på Sable Island beskrives ved

$$N(t) = 787 \cdot 1{,}14^{t},$$

hvor $N(t)$ betegner antal gråsælunger til tidspunktet t (målt i antal år efter 1970).

a) Bestem $N'(t)$.

b) Bestem $N'(20)$, og giv en fortolkning af dette tal.

Besvarelse

Først defineres funktionen: $N(t) := 787 \cdot 1.14^{t}$:

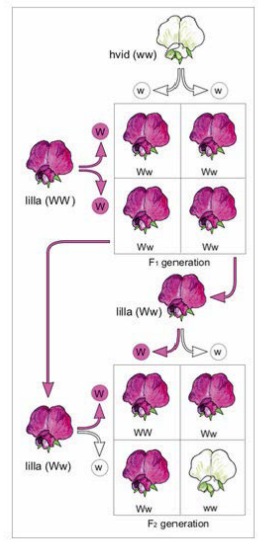
a)

Maple kan direkte bestemme $N'(t) = 103.1192425\ 1.14^t$
b)
Maple kan direkte bestemme $N'(20) = 1417.218265$

Tallet 1417 fortæller at i 1990 voksede antallet af gråsælunger på Sable Island årligt med ca 1417.

1010

Opgaveformulering



I krydsningsforsøg med en bestemt type blomster forventes det ifølge Mendels love, at 75% af blomsterne vil være rødviolette, og 25% af blomsterne vil være hvide.
For at teste, om blomsternes farver følger Mendels love, udførte man et konkret krydsningsforsøg med denne type blomster. Her observerede man, at der var 705 rødviolette og 224 hvide blomster.

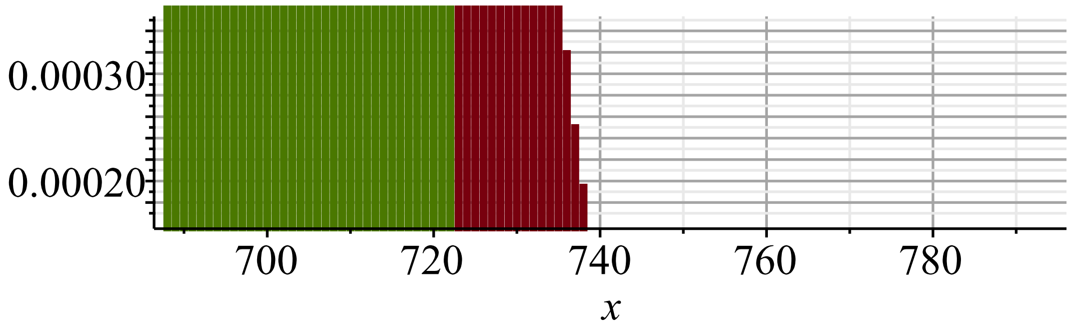
a) Opstil en nulhypotese, der kan benyttes til at teste, om blomsternes farver følger Mendels love.

b) Bestem de forventede værdier under antagelse af, at nulhypotesen er sand.

c) Benyt et binomialtest til at undersøge, om man kan forkaste nulhypotesen på et 5% signifikansniveau.

Besvarelse

a)
Nulhypotesen er at: 75% af den aktuelle type krydsede blomster generelt er rødviolette (og resten er hvide).
b)
Summen af blomster i det konkrete forsøg var $705 + 224 = 929$.
Den forventede mængde rødviolette er derfor $0.75 \cdot 929 = 696.75$ og den forventede mængde hvide $0.25 \cdot 929 = 232.25$.
c)
Da både afvigelser til den ene og den anden side vi afkræfte hypotesen udføres en tosidig test.
Det kan Maple gøre med kommandoen: $binomialTest(929, 0.75, 0.05, tosidet)$



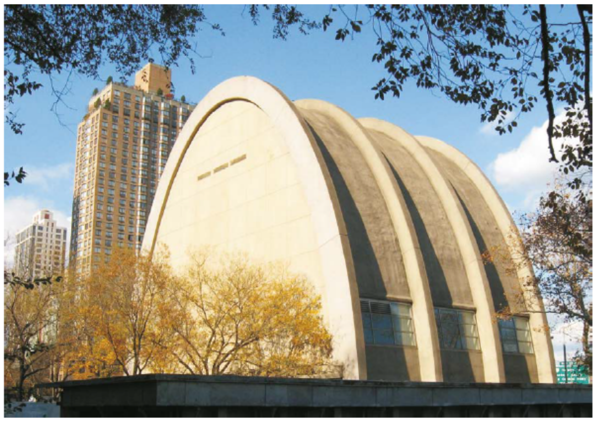
Her kan vi efter at have zoomet begavet ind, se at 705 ligger i acceptmængden.
Nulhypotesen kan altså *ikke* forkastes på et 5% niveau.

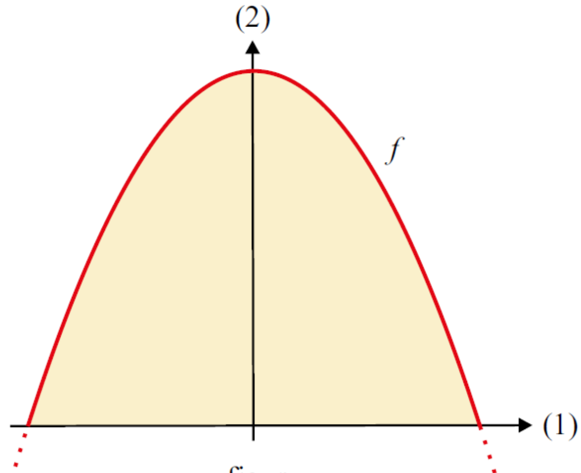
ALTERNATIVT
Da maple skal tegne beregne højden af alle pinde og tegne dem alle på grafen, tager det lidt tid, og vi er i udkanten af hvad der kan klares med denne metode.
Hvis n er meget stor 'hænger' Maple bare. Vi kan i stedet via fordelingsfunktionen for binomialfordelingen beregne P(X>705) = 1-P(X≤704).
$1 - bincdf(929, 0.75, 704) = 0.2799363853$
Vi ser at dette tal er langt over de 2,5% vi skal ligge under, hvis nulhypotesen skal afvises, så den kan ikke forkastes.

Hvis 704 have været mindre en forventningsværdien på 696,75 skulle vi istedet have beregnet P(X≤704) uden at trække det fra 1.

1011

Opgaveformulering





figur

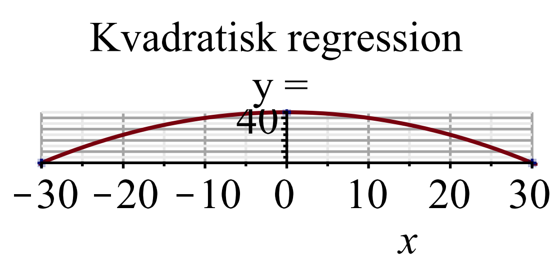
På billedet ses facaden af en bygning. På figuren ses en model af facaden indtegnet i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. I modellen har facadens profil form som en del af en parabel, der er grafen for et andengradspolynomium *f*. Det oplyses, at højden af facaden er 45 m og bredden af facaden er 60 m.

a) Bestem koordinatsættet til hvert af parablens skæringspunkter med koordinatakserne.

b) Bestem en forskrift for *f*.

Besvarelse

a)
Skæringerne med x-aksen er i punkterne (-30,0) og (30,0).
Skæringerne med y-aksen er i punktet (0,45).
b)

Da vi kender 3 punkter er det meget let at lave en polynomiel regression med grad=2, og vi kan nu aflæse at forskriften. Da vi ved grafen er symmetrisk er det meget lille 1.gradsled blot en afrundingsfejl som vi ignorer. Dvs forskriften for f(x) er : $f(x) = -0.05 \cdot x^2 + 45$.	$PolyReg([-30, 0, 30], [0, 45, 0], 2) =$ 

ALTERNATIVT
Da vi ved grafen er symmetrisk er forskriften på formen $f(x) = a \cdot x^2 + c$, og da grafen skærer i (0,45) er c=45.

Så vi kan blot indsætte fx punktet (0,30) og løse mht til a: $a \cdot 30^2 + 45. = 0 \xrightarrow{\text{solve}}$
$\{a = -0.05000000000\}$

Ligningen er endda så simpel, at vi kan løse den manuelt:

$a \cdot 30^2 + 45 = 0 \Leftrightarrow a \cdot 30^2 = -45 \Leftrightarrow a = -\frac{45}{30^2} \Leftrightarrow a = -\frac{45}{9 \cdot 100} = -\frac{5}{100} = -0.05$

1012

Opgaveformulering

En cirkel har centrum i punktet $C(4,2)$ og radius 3.

a) Opskriv en ligning for cirklen.

En ret linje l er givet på formen $y = k \cdot x$, hvor $k > 0$.

b) Bestem værdien af k, så l er en tangent til cirklen.

Besvarelse

a)
Når cirklens ligning er på formen: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, ved vi at (a,b) er koordinaterne til centrum og r, er radius.
Så en ligning for cirklen er: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$.

b)
Da linjen tangeres cirklen afstanden fra linjen til cirklens centrum lig radius.
Den generelle ligning for afstand fra punkt til linje er: $d = \frac{|a \cdot x + b \cdot y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Formlen forudsætter at linjes ligning er på formen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$.
I dette tilfælde får vi $y = k \cdot x = 0 \Leftrightarrow y - k \cdot x = 0$, så a er 1, b er -k og c er 0.

Vi kan derfor indsætte i formlen for afstand fra punkt til linje, sætte lig 3 og løse mht k.
$3 = \frac{|1 \cdot 4 - k \cdot 2|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} \xrightarrow{\text{solutions for k}} 3\sqrt{5} + 2, -3\sqrt{5} + 2$
Da det er oplyst at k skal være positiv, kasseres den negative løsning og svaret bliver:
k har værdien: $3\sqrt{5} + 2 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 8.7083$

#14.mw
2 af opgaverne er i det 'ekstra emne' der varierer fra år til år, og som I selv skal sætte jer ind i via et 'forberedelsesmateriale' bl.a. via 6 timers vejledning.
Disse opgaver er taget med for at I kan se dem, men I skal ikke lave dem, da vi ikke har brugt tid på at sætte os ind i det vejledende forberedelsesamteriale.
Disse opgaver er markeret med 'skal *ikke* regnes'.

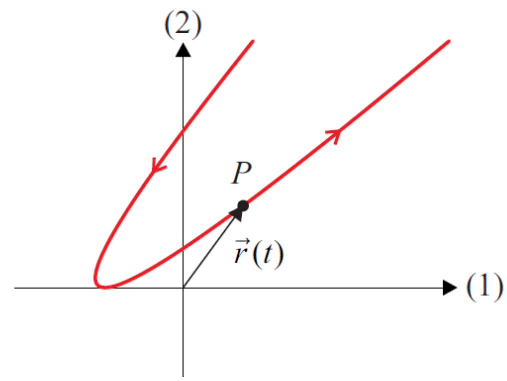
1. del *uden* hjælpemilder. Må skrives i Maple, men skal regnes manuelt.

1101

Opgaveformulering

I et koordinatsystem bevæger et punkt P sig således, at til tidspunktet t er stedvektoren $\vec{r}(t)$ til P er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t - 2 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad -4 \le t \le 4.$$



a) Bestem hastighedsvektoren til tidspunktet $t = 2$.

Besvarelse

Hastighedsvektoren er den afledte af stedvektoren: $v(t) = r'(t) = \langle (t^2 + t - 2)', (t^2)' \rangle =$

$\langle 2t + 1, 2t \rangle = \begin{bmatrix} 2t+1 \\ 2t \end{bmatrix}$

Hastighedsvektorens værdi til tidsunkte t=2 findes ved indsættelse: $\langle 2 \cdot 2 + 1, 2 \cdot 2 \rangle = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

1102

Opgaveformulering

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1 \ .$$

a) Bestem $\int_1^2 f(x)\, dx$.

Besvarelse

$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 3x^2 + 2x + 1\,\mathrm{d}x = [x^3 + x^2 + x]_1^2 = 2^3 + 2^2 + 2 - (1^3 + 1^2 + 1) = 11$

1103

Opgaveformulering

En vektor $\vec{v}$ og en matrix M er givet ved

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem $M^2 \cdot \vec{v}$.

Besvarelse

Skal *ikke* regnes.

1104

Opgaveformulering

I en model kan udviklingen af træmassen i en bestemt skov beskrives ved en funktion M, hvor $M(t)$ betegner træmassen (målt i kg) til tidspunktet t (målt i år). I modellen er væksthastigheden i træmassen proportional med træmassen. Det oplyses, at proportionalitetskonstanten er $1{,}04$.

a) Opskriv en differentialligning, som M må opfylde.

Besvarelse

M(t) betegner træmassen og væksthastigheden af denne er det samme som den afledte funktion der betegnes M'(t).
Da disse er proportionale (y=k*x) og k er 1,04 bliver differentialligningen:

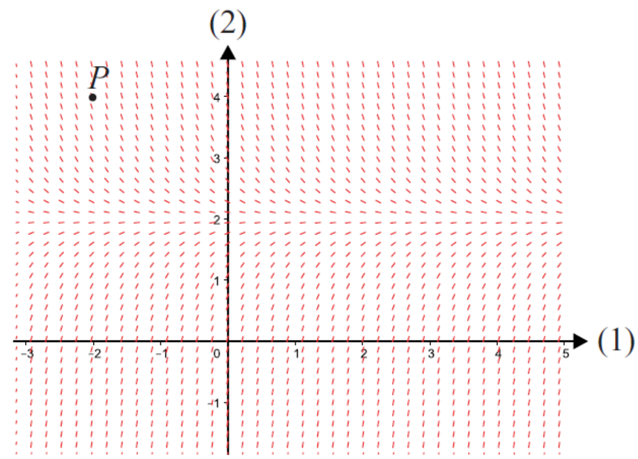
$M'(t) = 1.04 \cdot M(t)$.

Eller med alternativ notation: $y' = 1.04 \cdot y$.

1105

Opgaveformulering

På figuren ses hældningsfeltet hørende til en differentialligning.

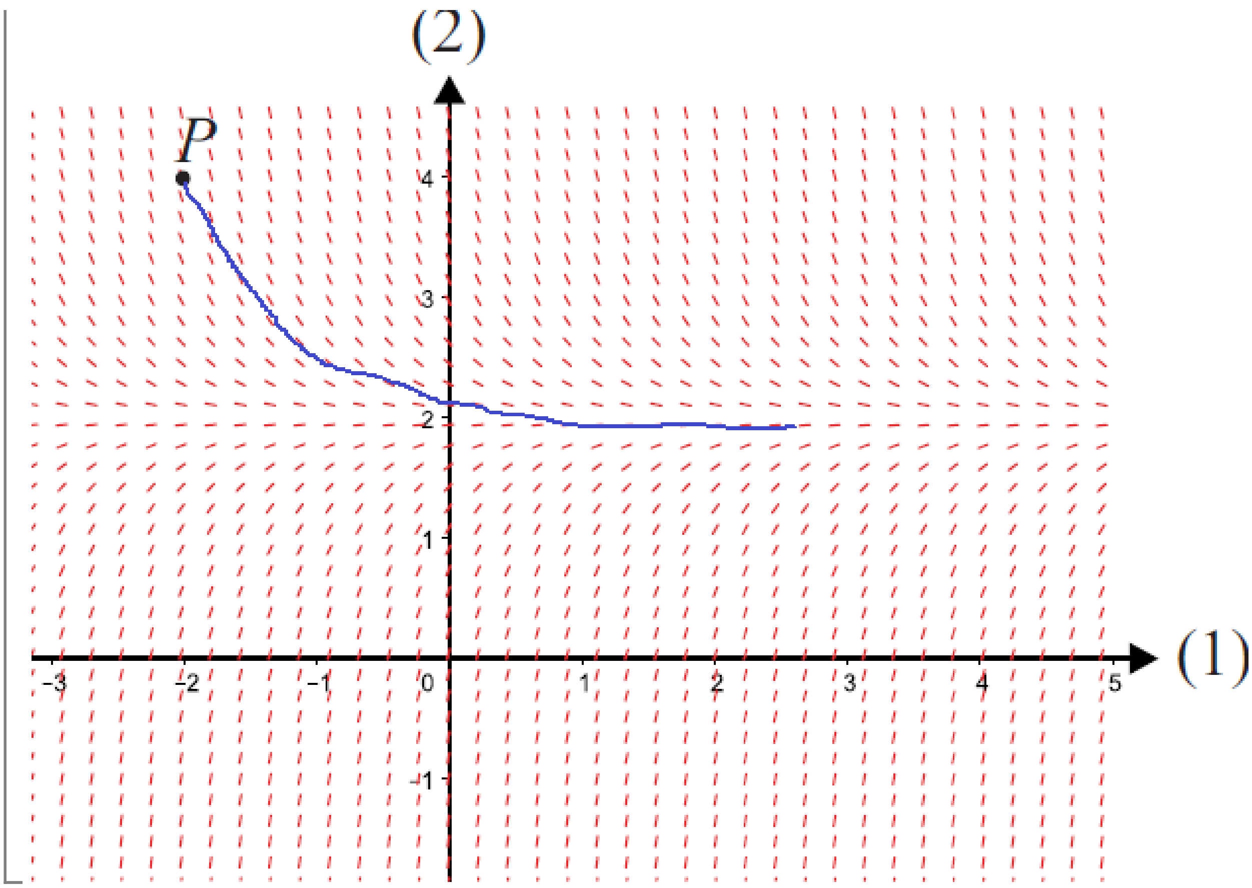


a) Skitsér den løsningskurve, der går gennem punktet $P(-2,4)$.

Besvarelse

Et hældningsfelt viser linjeelementer der er 'små tangentstykker'. En løsning i et givet punkt skal derfor være parallelt med linjeelementet i punktet.
Så en læsning indtegnes ved at begynde i punktet og så efter bedste evne at forbinde linjeelementerne til en kurve.

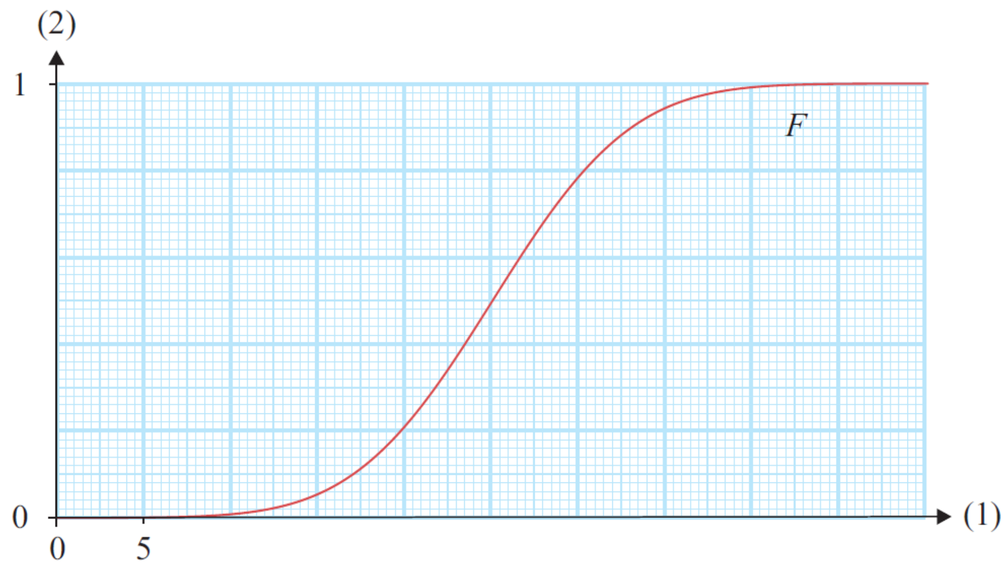
Jeg har indtegnet læsningskurven på figuren. Det er gjort ved at tage et skærmklip åbne det i et tegneprogram (paint på windows) tegne kurven tage et nyt skærmklip og indsætte det her.
Det er som i kan se svært at tegne i frihånd med en mus.



1106

Opgaveformulering

En bestemt type korn hældes i poser. Vægten af de enkelte poser med korn noteres. Den stokastiske variabel X angiver den faktiske vægt af korn i en pose (målt i kg). Det oplyses, at X er normalfordelt. På figuren ses grafen for fordelingsfunktionen F for X.



a) Bestem $E(X)$, og forklar betydningen af dette tal.

Besvarelse

Når X er normalfordelt er middelværdien af X lig x-koordinaten til vendepukktet på grafen for fordelingsfunktionen F.
Da F yderligere er rotationssymetrisk er det x-koordinaten til det punkt der ligger midt mellem 0 og 1 på-aksen.

Endu en måde at sige det på (som kan stå alene) er at middelværdien er lig medianen (50%-fraktilen) for en normalfordeling.
Så man starter på y-aksen ved y=0,5 går vandret hent til grafen rammes og herefter lodret ned på x-aksen og aflæser.

Det ses at E(x) er ca 25.

Da middelværdien er lig medianen, kan vi lige så vel svare ved at forklare betydningen af sidstnævnte. Det er lettere at formulere kort:
Det er den værdi som 50% af observationerne forventes at være mindre end eller lig med.

1107

Opgaveformulering

En funktion f er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 3x + 1.$$

Grafen for f går gennem punktet $P(2,6)$.

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i P.

Besvarelse

Tangentens hældning i punktet er f'(x)=dy/dx som kan beregnes ved indsættelse: 6/2+3*2+1= 10.
Tangentens ligning har den generelle formel: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Da vi ved at xo er 2, f(xo) er 6 og f'(xo) er 10, er det bare at indsætte,
så tangentens ligning i P er: $y = 10 \cdot (x-2) + 6 \Leftrightarrow y = 10\,x - 14$

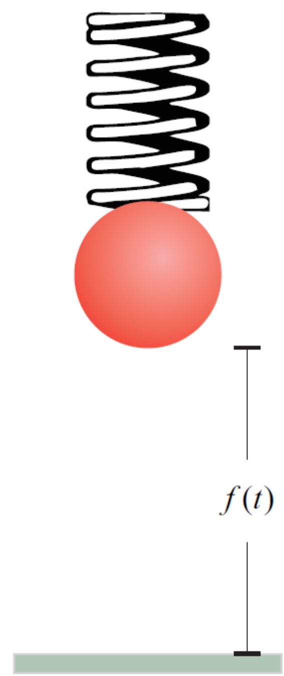
1108

Opgaveformulering

En bold er ophængt i en fjeder i et lokale. Bolden svinger langsomt op og ned. Boldens bevægelse kan beskrives ved den trigonometriske funktion givet ved

$$f(t) = 3 \cdot \sin(\tfrac{1}{2}\pi \cdot t) + 5\,,$$

hvor $f(t)$ betegner boldens afstand over gulvet (målt i dm) til tidspunktet t (målt i sekunder).



a) Bestem perioden T for boldens svingning.

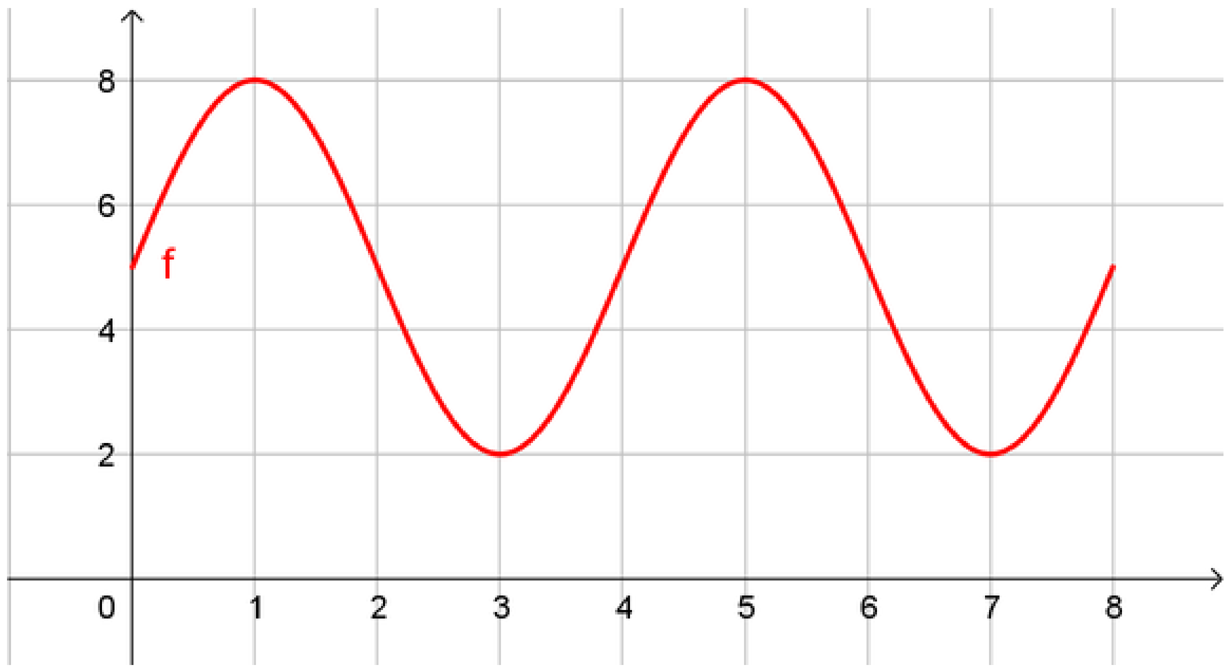
b) Tegn grafen for f over to perioder.

Besvarelse

a)
$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - f) + y_0$

Vi ved også at $T = \frac{2\pi}{\omega}$ Det ses at her er $\omega = \frac{\pi}{2}$ så perioden T er: $\frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 4$.

b)
Vi ved at grafen skal have 'facon' som sin(x) dvs begynde opad med vendepunkt på y-aksen.
Derudover skal en have Amplituden 3 og være løftet opad med 5.
Da vi også ved at den gentager sig selv med en periode på 4, kan vi skitsere en graf over 2 perioder.



1109

Opgaveformulering

En funktion f er givet ved

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6) \cdot \ln(x^2 + 1).$$

a) Bestem $f'(0)$.

b) Løs ligningen $f(x) = 0$.

Besvarelse

a)
Først beregnes
$f'(x) = (x^2 - 5x + 6)' \cdot \ln(x^2 + 1) + (x^2 - 5x + 6) \cdot (\ln(x^2 + 1))' =$

$(2x-5)\cdot\ln(x^2+1)+(x^2-5x+6)\cdot\dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x$

Herefter beregnes ved indsættelse:

$f'(0)=(2\cdot 0-5)\cdot\ln(0^2+1)+(0^2-5\cdot 0+6)\cdot\dfrac{1}{0^2+1}\cdot 2\cdot 0=0$

b)

Hvis f(x) skal være 0 fortæller nulreglen at løsningerne enten tilfredsstiller

$\ln(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=0$

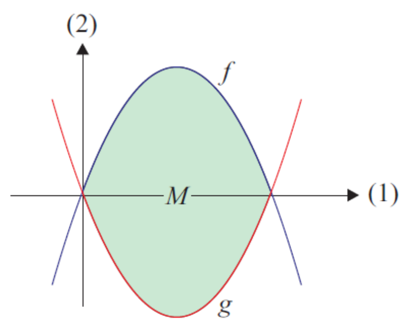
eller $x^2-5x+6=0$. Man kan bruge løsningsformlen, eller også bare (evt via gættereglen) gætte/se at rødderne er 2 og 3.

Så løsningsmængden til ligningen f(x)=0 er altså L={0,2,3}

1110

Opgaveformulering

På figuren ses en skitse af graferne for to funktioner *f* og *g*.



Graferne for *f* og *g* afgrænser en punktmængde *M*, der har et areal.

Tabellen viser nogle funktionsværdier for funktionerne *f*, *g*, *F* og *G*, hvor *F* og *G* betegner henholdsvis en stamfunktion til *f* og en stamfunktion til *g* .

x	0	1	2
$f(x)$	0	49	0
$g(x)$	0	−47	0
$F(x)$	0	36	66
$G(x)$	0	−34	−62

a) Bestem arealet af *M*.

Besvarelse

Arealet af M er arealet mellem de to grafer, og da f ligger øverst er det lig integralet

$$\int_a^b f(x)-g(x)\,\mathrm{dx}=[F(x)-G(x)]_a^b=F(b)-G(b)-(F(a)-G(a)).$$

Da f(x) og g(x) har samme værdi (0) i både x=0 og x=2 er det mellem disse to værdier der skal integreres, dvs a er 0 og b er 2.

Så får vi at arealet af M er $F(2) - G(2) - (F(0) - G(0)) = 66 - (-62) - (0 - 0) = 128$.

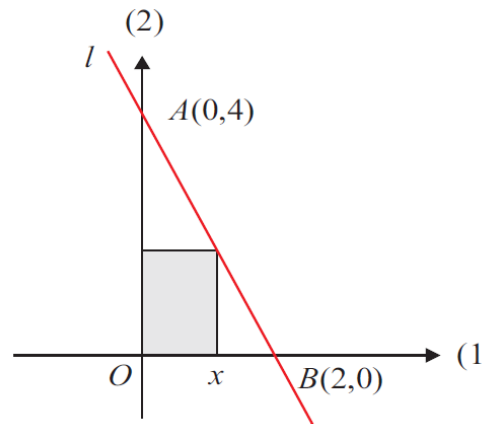
1111

Opgaveformulering

På figuren ses en ret linje l gennem punkterne A og B. Desuden er et rektangel indskrevet i trekant OAB som vist på figuren.

a) Bestem arealet af rektanglet som funktion af x.

b) Bestem den værdi af x, der gør arealet af rektanglet størst muligt.



Besvarelse

a)

Da vi kende 2 punkter på l, kan dens ligning bestemmes. b er 4 og a må være -4/2=-2. Dvs l har ligningen y=-2x+4.

Da rektanglet R's hjørne ligger på l kan y-koordinaten og dermed højden af R bestemmes ved indsættelse .

Men x indsat på x's plads giver jo bare det samme så h er -2x+4 så rektanglets areal er $A = x \cdot (-2x + 4) = -2x^2 + 4x$

b)

Formlen for A er et 2.gradspolynomium, og da koefficienten til 2.gradsledet a=-2 er negativ har den maksimum i toppunktet.

Arealet af R er altså størst i toppunktets x-koordinat: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$.

2. del *med* hjælpemidler

with(*Gym*) :

with(*RealDomain*) :

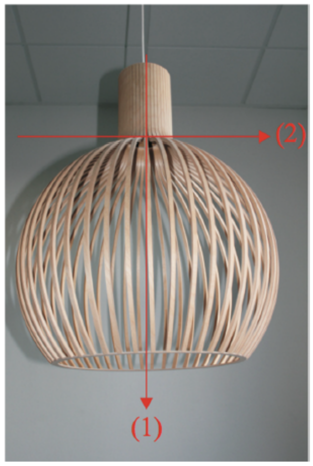
1112

Opgaveformulering

En funktion f er givet ved

$$f(x)=\begin{cases} 6, & -15\le x\le 0 \\ \sqrt{-x^2+52x+36}, & 0<x\le 44. \end{cases}$$

I en model danner grafen for f en kurve, der har samme form som hver af de 47 lameller, der udgør lampen på billedet nedenfor. Alle mål er i cm.



a) Tegn grafen for f.

b) Bestem længden af den krumme del af én af de 47 lameller.

Besvarelse

a)

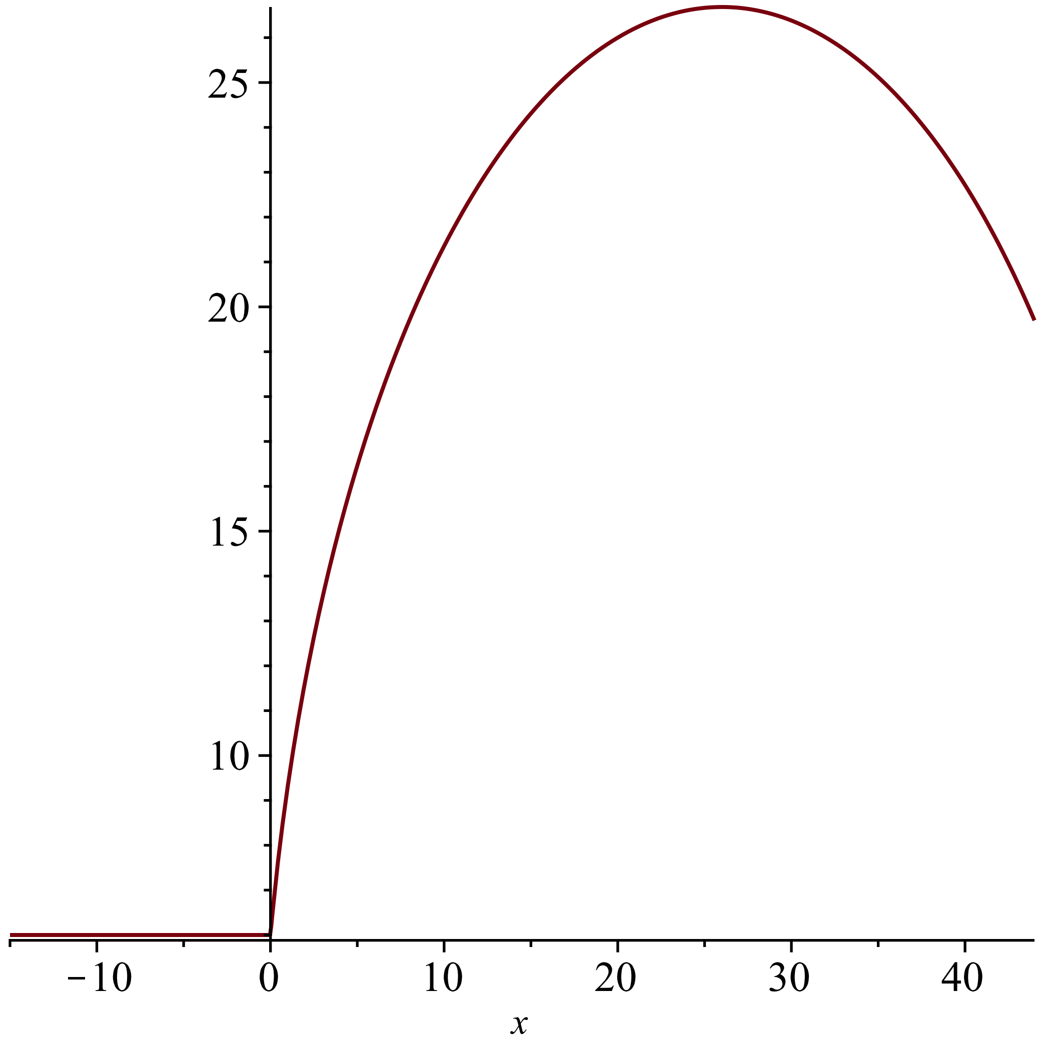
Opgaven her er blot at vide hvordan man indtaster en gaffelforskrift med grænser i det værktøj man bruger.

I maple gøres det sådan (Se under palletten 'Expression')

$$f(x) := \begin{cases} 6 & x<0 \\ \sqrt{-x^2+52\,x+36} & x\ge 0 \end{cases} :$$

Herefter kan vi plotte grafen. Det viser sig at man er nødt til selv at kontrollere hvilket område på x-aksen man vil have vist grafen for, selv om f er defineret i et interval.

$plot(f(x), x=-15..44)$

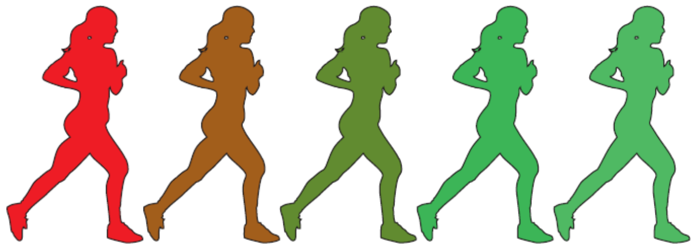


b)
For at bestemme kurvelængden L, af en graf tyer vi til formelsamlingen. Her kan vi læse (formel 171):

$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x$. Så vi indsætter og får at kurvelængden er : $\int_{0.0}^{44} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x =$ 55.61849108

1113

Opgaveformulering



En kvinde har gennem en periode i forbindelse med sine løbeture noteret sammenhørende værdier af den gennemsnitlige løbetid pr. km og sin vægt umiddelbart før løbeturen. Resultaterne fremgår af tabellen nedenfor.

Vægt (kg)	83,1	83,0	…	75,5	75,2
Gennemsnitlig løbetid pr. km (minutter)	6,59	6,49	…	6,29	6,23

(Resten af tabellen findes i bilaget: " stxA1 Bilag 1 Opgave 13 Data for løb.xlsx")

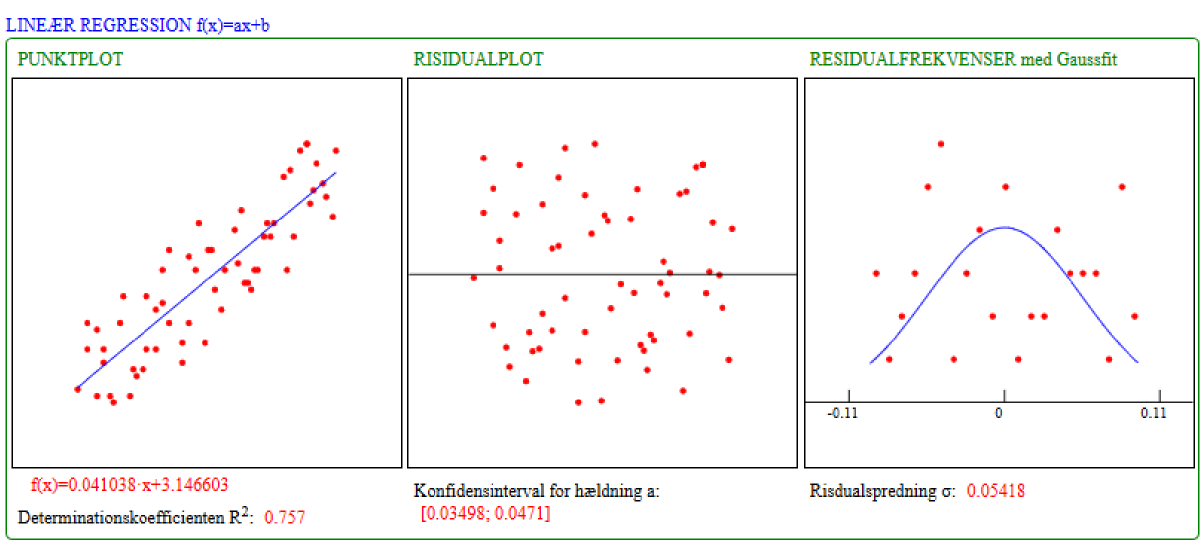
I en model antages det, at den gennemsnitlige løbetid pr. km (målt i minutter) som funktion af vægten (målt i kg) kan beskrives ved en lineær funktion. Modellen bestemmes ved lineær regression på tabellens data.

a) Benyt residualplottet til at vurdere modellen.

b) Gør rede for, at residualerne med god tilnærmelse kan siges at være normalfordelte, og bestem et 95%-konfidensinterval for hældningskoefficienten i modellen.

Besvarelse

Jeg bruger her min egen app. Den ligger her: http://www.techlord.dk/MatBog2017/fitExcel.html
Omdøb excelfilen til zip, gå ind under mappen-->xl-->wirksheets-->og træk filen :'sheets.xml' til skriveborder, så udpakkes den automatisk.
Træk den herefter fra skrivebordet til det grønne felt i appen. Så får man automatisk nedenstående (og mere til, jeg har kun klippet det relevante ud).



a)
Det er meget svært at sige hvad man kan konkludere ud fra residualplottet (det midterste). Man kan sige at der ikke ser ud til at være en systematik i afvigelserne, dermed forekommer det ikke oplagt at man kan finde bedre (simpel) model. Efter min vurdering kan man egentligt ikke sige mere..
Se man på selve regressionsplottet til højre, bemærker man at afvigelserne er er store i forhold til bredden af variationsintervallet. På den anden side ser det i høj grad ud til at den linære model indfanger den systematik der er i data. De er måske bare ikke mere systematik i data.
b)
Som det ses leverer appen direkte et 95%konfidensinterval : [0.03498;0.0471].

På det sidste plot til højre ses en normalfordelingsapprokssimation (blå kurve) til residualerne. Af den fremgår det tydeligt at residualerne ***IKKE*** er normalfordelte. Det er en fejl i opgaven.

1114

Opgaveformulering

Tabellen viser sandsynlighedsfeltet for en stokastisk variabel X, der angiver en spillers fortjeneste (målt i kr.) i et bestemt spil.


Grafik: www.colourbox.dk

Det oplyses, at a er et positivt tal.

Fortjeneste (kr.)	-10	a	a^2
Sandsynlighed	0,70	0,20	0,10

Middelværdien for X angiver gennemsnittet for en spillers fortjeneste.

a) Bestem gennemsnittet for en spillers fortjeneste, når $a = 5$.

b) Bestem de værdier af a, som gør, at en spiller i gennemsnit vinder penge på at spille.

Besvarelse

a)
Gennemsnittet beregnes som den sandsynlighedsvægtede sum af værdierne (fortjenesterne) af den stokastiske variabel.
Dvs. når a er 5 er E(X)= $0.7 \cdot (-10) + 0.2 \cdot 5 + 0.1 \cdot 5^2 = -3.5$.

b)
Gennemsnitsfortjenesten f kan opfattes som en funktion af a:
$f(a) := 0.7 \cdot (-10) + 0.2 \cdot a + 0.1 \cdot a^2 = a \rightarrow -10 \cdot 0.7 + 0.2\, a + 0.1\, a^2$

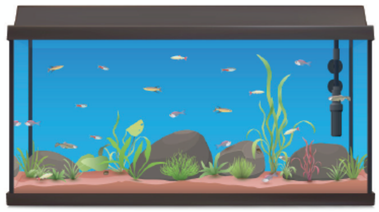
Der tale om et 2.gradspolynomium i a, med grenene/benene opad (da koeffiscienten til 2. gradsleddet er positiv) så funktionen er positiv udenfor intevallet mellem rødderne.
Rødderne bestemmes ved $f(a) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{a = 7.426149773\}, \{a = -9.426149773\}$

En spiller vil derfor vinde i gennemsnit når a er mindre end -9,426, eller når a er større end

7.426.

1115

Opgaveformulering



Grafik: www.colourbox.dk

I et akvarium kan temperaturen under opvarmning som funktion af tiden beskrives ved differentialligningsmodellen

$$\frac{dT}{dx} = 1{,}54 - 0{,}259 \cdot (T - 22),$$

hvor $T(x)$ betegner temperaturen (målt i °C) i akvariet til tidspunktet x (målt i timer efter påbegyndt opvarmning). Det oplyses, at temperaturen i akvariet er 22°C, når opvarmningen starter.

a) Bestem temperaturens væksthastighed, når temperaturen i akvariet er 26°C.

Akvariets ejer har købt en sart akvariefisk, der ikke tåler temperaturer under 27°C.

b) Benyt modellen til at bestemme, hvor lang tid der går, fra opvarmningen er påbegyndt, til det er sikkert at slippe fisken ned i akvariet.

Besvarelse

a)

Vækshastigheden er netop dT/dx som der står på venstresiden, så for at bestemme den indsættes 26 grader på højresiden:

$$\frac{dT}{dx} = 1.54 - 0.259(26 - 22) = \frac{d}{dx} T(x) = 0.504$$

Temperaturen vokser altså med ca 0,5 grader per time når den er 26 grader.

b)

Vi bruge Maple til at løse differentialligningen:

$dsolve([T'(x) = 1.54 - 0.259(T(x) - 22), T(0) = 22])$

$$T(x) = \frac{1034}{37} - \frac{220\, e^{-\frac{259x}{1000}}}{37} \qquad \textbf{(14.15.2.1)}$$

Vi løser nu ligningen T(x)=27: $\frac{1034}{37} - \frac{220\, e^{-\frac{259x}{1000}}}{37} = 27 \xrightarrow{\text{solve}} 7.097604189$

Dvs der går ca 7,1 time fra opvarmningen på bgyndes til fisken kan slippes ned i akvariet.

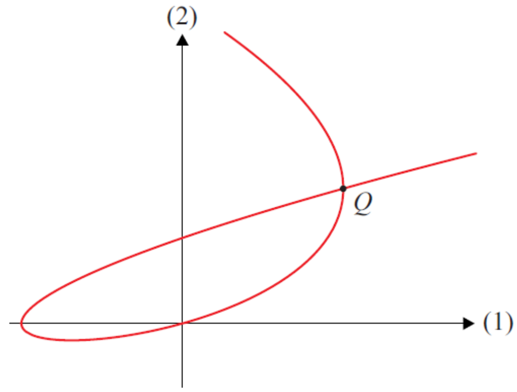
1116

Opgaveformulering

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 12t \\ t^2 - 2t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathrm{R}.$$

På banekurven for $\vec{r}$ er punktet Q et dobbeltpunkt hørende til t-værdierne $t = -2$ og $t = t_0$.



a) Bestem koordinatsættet til punktet Q, og bestem t_0.

b) Bestem den spidse vinkel mellem banekurvens to tangenter i punktet Q.

Besvarelse

a)

Q's koordinater findes ved indsættelse: $Q = \left((-2)^3 - 12 \cdot (-2), (-2)^2 - 2 \cdot (-2) \right) =$
$Q = (16, 8)$

Når koordinatfunktionerne har grad 2 og 3, ved vi fra sætningen i bogen at: 'summen af de to parameterværdier i et dobbeltpunkt er altid p+q = - bo/ao'.

ao og bo er koeffiscienterne til henholdsvis 2- og 1-gradsledet i andengradspolynomiet dvs ao er 1, og bo er -2.

Summen af de to paramterværdier er altså -(-2)/1=2. Da den ene parameter -2 må den anden være $t_0 = 4$.

b)

$r(t) := \langle t^3 - 12\, t, t^2 - 2\, t \rangle = t \rightarrow \langle t^3 - 12\, t, t^2 - 2\, t \rangle$

Tangentvektoren er parallel med den afledte af stedfunktionen r'(t).
Retningvektorer for tangenterne ved at indsætte t=-2 og t=4 i r'(t)
og vinklen findes ved at bruge vinkelkommandoen fra gym-pakken:

$$vinkel\left(\begin{bmatrix} -36 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 180 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$$

$$172.4468301 \qquad \textbf{(14.16.2.1)}$$

$r'(-2)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(14.16.2.2)}$$

$r'(4)$

$$\begin{bmatrix} 36 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \textbf{(14.16.2.3)}$$

$r'(t)$

$$\begin{bmatrix} 3t^2 - 12 \\ 2t - 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(14.16.2.4)}$$

$vinkel(r'(-2), r'(4)) = \; = 99.46232224$

Den spidse vinkel mellem tangenterne i dobbeltpunktet er dermed $180 - 99.46 = 80.54$

1117

Opgaveformulering

På et bestemt gymnasium sælges to slags sodavand A og B. På gymnasiet gennemføres jævnligt spørgerunder blandt de elever, der drikker sodavand, om de vælger A eller B. Det antages, at 10 % af eleverne skifter fra A til B, og 22 % skifter fra B til A fra spørgerunde til spørgerunde.
Antallet af elever, der drikker henholdsvis sodavand A og sodavand B i spørgerunde n, betegnes henholdsvis a_n og b_n.

a) Gør rede for, at udviklingen i fordelingen mellem antal elever, der drikker sodavand A og sodavand B, kan beskrives ved

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,22 \\ 0,1 & 0,78 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

b) Bestem en egenvektor for $\begin{pmatrix} 0,9 & 0,22 \\ 0,1 & 0,78 \end{pmatrix}$, når egenværdien er 1, og forklar, hvad egenvektoren fortæller om forholdet mellem antallet af elever, der vælger sodavand A henholdsvis B.

Besvarelse

Skal *ikke* regnes.

1118

Opgaveformulering

En funktion f af to variable er bestemt ved

$$f(x, y) = x^3 - 3x \cdot y + y^3.$$

a) Bestem $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Det oplyses, at grafen for f har netop to stationære punkter.

b) Bestem arten af hvert af de to stationære punkter.

Besvarelse

Jeg definerer funktionen: $f(x, y) := x^3 - 3\,x \cdot y + y^3 = (x, y) \rightarrow x^3 - 3\,y\,x + y^3$

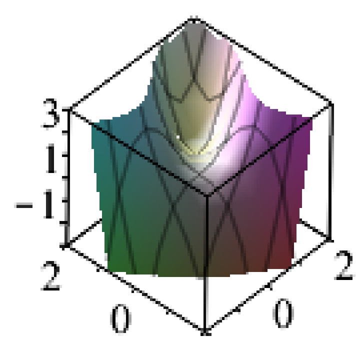
a)

og lader Maple beregne de partielle afledede:

x: $diff(f(x, y), x) = 3\,x^2 - 3\,y \xrightarrow{\text{assign to a name}} fx(x, y)$

y: $diff(f(x, y), y) \quad 3\,y^2 - 3\,x \xrightarrow{\text{assign to a name}} fy(x, y)$

b)

I stationære punkter er begge de partielle afledede 0, så jeg løser: $solve([fx(x, y) = 0, fy(x, y) = 0]) = \{x = 1, y = 1\}, \{x = 0, y = 0\}$ Man kan bestemme arten ved at lave et plot og kigge på det: Jeg kan se at der ligger en saddel i (0,0) og samt at det andet i (1,1) er et minimum.	$plot3d(f(x, y))$ 

Man kan også gå all-in og bestemme de de dobbeltafledede:

r: $diff(f(x, y), x, x) = 6\,x \xrightarrow{\text{assign to a name}} r(x, y)$

s: $diff(f(x, y), x, y) = -3 \xrightarrow{\text{assign to a name}} s(x, y)$

t: $diff(f(x, y), y, y) = 6\,y \xrightarrow{\text{assign to a name}} t(x, y)$

Deres værdier i (0,0) er (r,s,t) = (0,-3,0). Da $r \cdot t < s^2$: i (0,0) er der saddelpunkt.
og i (1,1) er (r,s,t) = (6,-3,6). Da $r \cdot t > s^2$ i (1,1) er der minimum.

1119

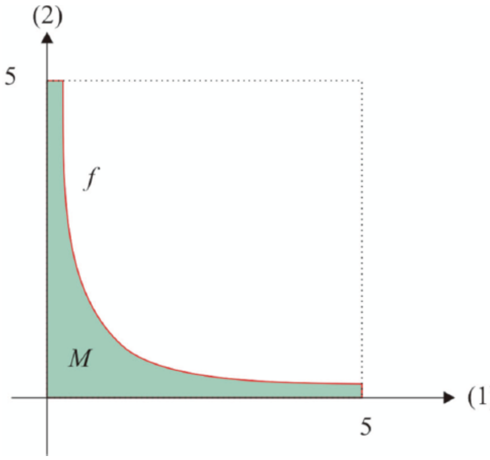
Opgaveformulering

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Et kvadrat med siden 5 er indlagt i et koordinatsystem (se figur). Kvadratet deles i to punktmængder af grafen for f. Den skraverede punktmængde kaldes M (se figur).

a) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360 ° om førsteaksen.



Besvarelse

Det er bare at båtte ind i formlen for omdrejningslegeme. Der er dog en lille fælde, for den første del til venstre er jo ikke et område afgrænset af grafen for f, så det må vi behandle for sig selv.

x-koordinaten hvor f har værdien 5 er 1/5. Området til venstre for 1/5 er afgrænsningen opad er et vandret linjestykke, så ved omdrejning fås en liggende (flad) cylinder med højde 1/5 og radius 5.

Rumfanget af cylinderen er givet ved formlen: $\pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{1}{5} = 5\,\pi$

Rumfanget svarende til grafen under f beregnes ved formlen: $\pi \cdot \int_{\frac{1}{5}}^{5} \left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{24\,\pi}{5}$

Det samlede rumfang bliver dermed: $5\,\pi + \frac{24\,\pi}{5} = \frac{49\,\pi}{5} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 30.788$

#15.mw

2 af opgaverne er i det 'ekstra emne' der varierer fra år til år, og som I selv skal sætte jer ind i via et 'forberedelsesmateriale' bl.a. via 6 timers vejledning.
Disse opgaver er taget med for at I kan se dem, men I skal ikke lave dem, da vi ikke har brugt tid på at sætte os ind i det vejledende forberedelsesamteriale.
Disse opgaver er markeret med 'skal *ikke* regnes'.

1. del *uden* hjælpemidler. Må skrives i Maple, men skal regnes manuelt.

1201

Opgaveformulering

a) Bestem integralet

$$\int_1^2 (8x^3 + 6x^2)\,dx\,.$$

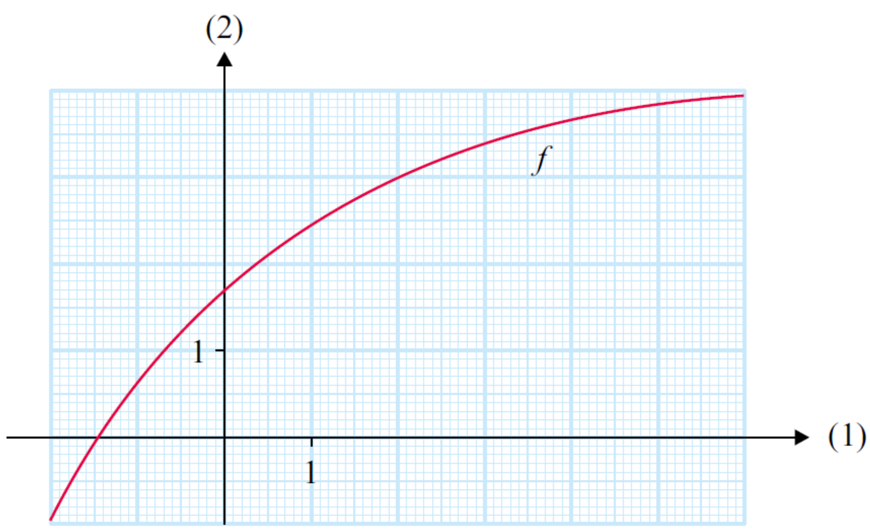
Besvarelse

$\int_1^2 8\,x^3 + 6\,x^2 \mathrm{d}x = \left[2\,x^4 + 2\,x^3\right]_1^2 = 2\cdot 2^4 + 2\cdot 2^3 - \left(2\cdot 1^4 + 2\cdot 1^3\right) = 44$

1202

Opgaveformulering

På figuren ses grafen for en funktion f, der har en invers funktion f^{-1}.



a) Bestem $f^{-1}(3)$.

Besvarelse

Ved den inverse funktion har x og y 'byttet plads'. Dvs jeg skal aflæse baglæns finde 3 på y-aksen, gå vandret hen til grafen og gå lodret ned på x-aksen og aflæse værdien der.

$f^{-1}(3) = 2$.

1203

Opgaveformulering

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 4 \cdot e^{x^2+2x-3}.$$

a) Bestem $f(1)$.

b) Bestem monotoniforholdene for f.

Besvarelse

a)

Jeg indsætter i forsriften: $f(1) = 4 \cdot e^{1^2+2\cdot 1-3} = e^0 = 1$.

b)

Vi behøver (næsten) ikke at regne!

Den ydre funktion er en ekspontialfunktion der er voksende (overalt). Dermed er det den indre der afgør monotoniforholdende for f(x).
Den indre er et andengradspolynomium, dvs grafen er en parabel med grenene opad (da koefficienten til 2.gradsleddet a=1 er positiv.) Dermed ved, at f(x) er aftagende frem til x-koordinaten til toppunktet og derefter voksende.

x-koordinaten til toppunktet er: $-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot 1} = -1$.

Dvs f(x) er aftagende i intervallet $]-\infty;-1]$ og voksende i intervallet $[-1;\infty[$.

1204

Opgaveformulering

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2 \cdot e^x - x^2 - 2x.$$

a) Undersøg, om f er en løsning til differentialligningen

$$y' = x^2 + y - 2.$$

Besvarelse

Det undersøges ved at indsætte forskriften for f, i ligningen og se om det stemmer.
Vi skal i den forbindelse også kende $y' = f'(x) = 2 \cdot e^x - 2x - 2$.
Vi indsætter nu idet vi husker at y blot står for f(x) dvs på y's plads indsættes: $2e^x - x^2 - 2x$.

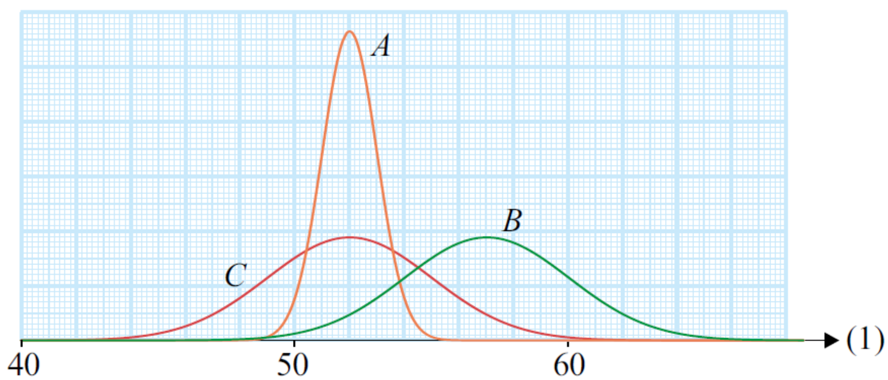
$2 \cdot e^x - 2x - 2 = x^2 + 2 \cdot e^x - x^2 - 2x - 2 \Leftrightarrow 0 = x^2$.

Den sidste ligning er IKKE sand for alle x, så f er ikke en løsning til differentailligningen.

1205

Opgaveformulering

Nedenstående figur viser graferne for tæthedsfunktionerne hørende til tre normalfordelte stokastiske variable.



a) Gør rede for, hvilken af graferne A, B eller C der hører til tæthedsfunktionen for den normalfordelte stokastiske variabel, der har middelværdi 52 og spredning 3.

Besvarelse

B, har sit lokale ekstrema liggende ved ca 57, så den har ikke middelværdi 52, og dermed er B udelukket.

At spredningen er 3 betyder at der i intervallet fra 52-3=49 til 52+3=55 skal ligge 68,27% af sandsynlighedsmassen. Dvs ca 3/3 af arelet under kurven skal ligge i det interval.
Man kunne tegne lodrette linjer ind på bilaget i x=49 og x=55 for at tydeliggøre det, men det ses umidelbart at stort set hele arealet under A (måske 99%) ligger i det interval. Så A er også udelukket.

Altså er det C der er svaret.

1206

Opgaveformulering

En matrix M er givet ved

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem M^{-1}.

Et ligningssystem er givet ved

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

b) Bestem løsningen til ligningssystemet.

Besvarelse

skal *ikke* regnes

1207

Opgaveformulering

I et koordinatsystem bevæger et punkt P sig således, at stedvektoren til P til tidspunktet t er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ \frac{1}{2}t^2 - t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

a) Bestem hastighedsvektoren til tidspunktet $t = 0$.

Linjen l er bestemt ved ligningen

$$l: \; x - y = 2.$$

b) Bestem de to tidspunkter, hvor hastighedsvektoren er parallel med l.

Besvarelse

a)

Hastighedsvektoren findes ved at differentiere koordinatfunktionerne: $\vec{v}(t) = \langle 3t^2 - 1, t - 1 \rangle$

$= \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 - 1 \\ t - 1 \end{bmatrix}$

b)

Det kan aflæses at $\vec{n} = \langle 1, -1 \rangle = \vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en normalvektor for l.

Hastighedsvektoren er parallel med l, når den er ortogonal (vinkelret) på l's normalvektor, dvs når de to vektores prikprodukt er 0 så jeg løser:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3t^2 - 1 \\ t - 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (3t^2 - 1) - 1 \cdot (t - 1) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t \cdot (3t - 1) = 0.$$

Nulreglen giver os at den bageste liging har løsningerne 0 og 1/3, så svaret bliver:
Hastighedsvektoren er parallel men linjen l til tispunkterne t=0 og t=1/3.

1208

Opgaveformulering

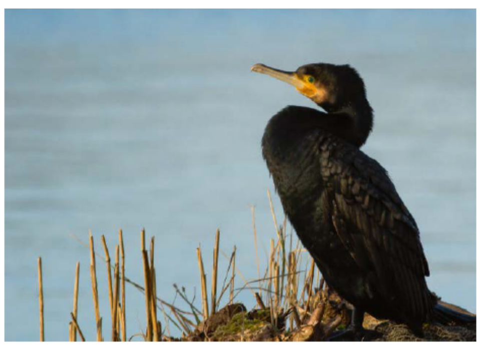



Foto: www.colourbox.com

I en model kan antallet af skarvkolonier i Danmark i perioden 1982-2008 beskrives ved en funktion S af tiden t (målt i år efter 1982). Den hastighed, hvormed antallet af skarvkolonier vokser til tidspunktet t, er proportional med produktet af antallet af skarvkolonier til tidspunktet t og forskellen mellem 67 og antallet af skarvkolonier til tidspunktet t.
Det oplyses, at proportionalitetskonstanten er $k = 0{,}0029$.

a) Opskriv en differentialligning, som S må opfylde.

Besvarelse

At noget y, er proportionalt med noget andet x, betyder at det ene er lig en konstant k, gange det andet, dvs $y = k \cdot x$.

Her er det ændringshastigheden af S(t) der er proportional med et produkt, dvs vi må have

ligning på formen $S'(t) = k \cdot a \cdot b$,
hvor a og b er de to faktorer i produktet.

Vi kan læse i teksten at den ene faktor a er 'antallet af skarvkolonier til tiden t' dvs a er blot S (t).
Vi kan også læse at den anden faktor b er 'forskellen mellem 67 og antallet af skarvkolonier til tiden t' dvs b er 66-S(t).

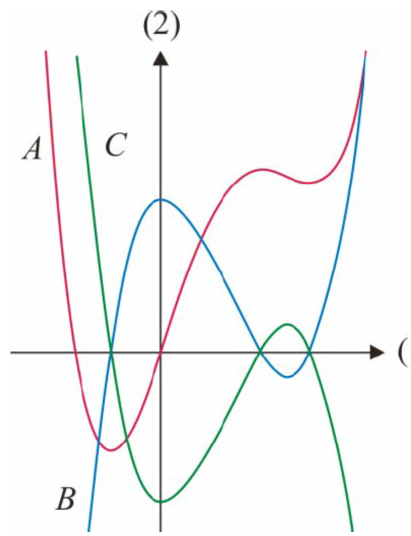
Da værdien af k også er angivet, bliver differentialligenen:
$S'(t) = 0.0029 \cdot S(t) \cdot (67 - S(t)) \Leftrightarrow y' = 0.0029\, y(67 - y)$.

1209

Opgaveformulering

På figuren ses graferne for tre funktioner. Det oplyses, at en af graferne er graf for funktionen f, og en anden er graf for en stamfunktion F til f.

a) Gør rede for, hvilken af graferne A, B og C der er graf for f, og hvilken der er graf for F.



Besvarelse

Vi ved at der hvor F har lokale ekstrema har f har nulpunkter. (da f=F').
Det ses at både B og C har nulpunkter der hvor A har ekstrema så A svarer til F.

Derudover kan vi se at F længst mod venstre er aftagende, dvs f må være negativ der.
Det er C ikke, men B er så B svarer til f.

(Vi kunne have brugt samme type argument på andre dele af graferne, fx længst til højre.)

1210

Opgaveformulering

En stokastisk variabel X er binomialfordelt, $X \sim b(4, \frac{1}{3})$.

a) Vis, at $P(X=2) = \dfrac{24}{81}$.

Besvarelse

Det er blot at pløje ind i sandsynlighedsfunktionen for binomialfordelingen. (#252 i formelsamlingen):

$P(X=r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$.

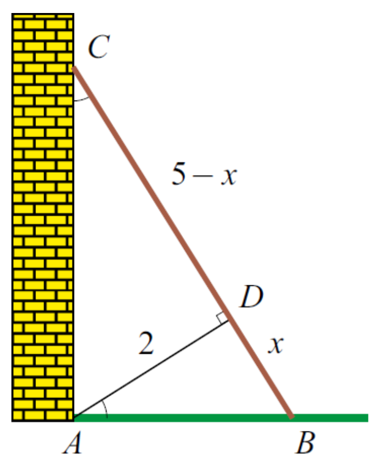
Af opgaven fremgår at n=4, p=1/3 og r=2.
Det indsættes, idet vi også bruger formlen (#250) for binomialkoefficienter :

$\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$.

$$P(X=2) = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right)^{4-2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{4}{3^4} = \frac{24}{81}.$$

1211

Opgaveformulering



Figuren viser en model af en 5 meter lang stige, der stilles op ad en lodret mur. I modellen er jorden vandret, murens bund benævnes A, og stigens røringspunkt med jord og mur benævnes henholdsvis B og C. Det punkt på stigen, der er tættest på bunden af muren, benævnes D, og afstanden fra B til D benævnes x.
Det oplyses, at der er to mulige placeringer af stigen, så $|AD| = 2$.

a) Bestem værdien af x for hver af disse to placeringer af stigen.

Besvarelse

Der er 3 retvinklede trekanter på figuren, ABC, ADB og ACD, vi kan derfro opskrive pythagoras for dem alle:

$|AB|^2 + |AC|^2 = 5^2$, $2^2 + x^2 = |AB|^2$ og $2^2 + (5-x)^2 = |AC|^2$

Indsætter vi venstresiderne fra de to bageste ligningern i den første fås:
$2^2 + x^2 + 2^2 + (5-x)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + 8 + 5^2 + x^2 - 10x = 5^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$
.

Den sidste ligning kan løses med løsningsformlen, men vi kan også bruge gættereglen:
Produktet af rødderne er c=4 og deres sum er -b=-(-5)=5, så det gættes let at 1 og 4 er rødder.

De to mulige værdier af x er altså 1 og 4.

2. del *med* hjælpemidler
with(*Gym*) :
with(*RealDomain*) :

1212

Opgaveformulering

Foto: www.colourbox.com

En fabrik udleder en fosforforbindelse i sit spildevand. I en periode undersøges fabrikkens spildevand, og det viser sig, at den dagligt udledte mængde af fosfor-forbindelsen er normalfordelt med middelværdien 0,53 kg og spredningen 0,20 kg.

a) En given dag måles en udledning af 1 kg af fosforforbindelsen. Afgør, om denne mængde er et exceptionelt udfald.

b) Bestem sandsynligheden for, at der på en tilfældig dag i perioden udledes mindre end 0,70 kg af fosforforbindelsen.

Besvarelse

a)
Et exceptionelt udfald er ifølge formelsamlingen (s 41) et udfald der ligger mere end 3 standardafvigelser fra middel. Middelværdien 0.53, plus 3 gange spredningen 0,2 giver
$0.53 + 3 \cdot 0.2 = 1.13$. 1 kg ligger under denne værdi så det er ikke et exceptionelt udfald.
b)
Der spørges om P(X≤0,7) og det kan besvares med et opslag i fordelingsfunktionen for normalfordelingen: $\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (Formel #265)
Den er indbygget i maple og kan beregnes med kommandoen: $normalcdf(\mu, \sigma, x)$ eller $normalcdf\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.
Dvs sandsynligheden for at der på en tilfældig dag i perioden udledes mindre (eller lig) 0,7 kg af fosforforbindelsen er:
$normalcdf(0.53, 0.2, 0.7) = 0.8023$

1213

Opgaveformulering

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 25 \cdot x^4 - \frac{2}{x}, \quad x > 0.$$

a) Bestem en forskrift for den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(1,8)$.

Besvarelse

Det er ikke vanskeligt selv at integrere denne funktion. Men bruger man Maple ser det sådan ud:

$$\int 25 \cdot x^4 - \frac{2}{x}\, dx = -2\ln(x) + 5x^5$$

Vi ved at ovenstående plus en vilkårlig konstant k, også er en stamfunktion. Maple vælger åbenbart kun at vise os den der svarer til at k=0.
Da grafen går gennem (1,8) skal F(1) altå være 8. Indsætter vi det og løser ligningen fås:

$$-2\ln(1) + 5 \cdot 1^5 + k = 8 \xrightarrow{\text{solve}} \{k = 3\}$$

Den efterspurgte stamfunktion har dermed forskriften : $F(x) = -2\ln(x) + 5x^5 + 3$.

1214

Opgaveformulering

I en model opdeles en dyrepopulation i de unge dyr og de gamle dyr, hvor x_n betegner antallet af unge dyr, og y_n betegner antallet af gamle dyr i år n. Matricen M givet ved

$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}$ beskriver udviklingen i populationen fra år n til år $n+1$.

Dyrepopulationen starter med at bestå af ingen unge dyr og 10 gamle dyr.

a) Bestem antallet af unge og gamle dyr i populationen efter 6 år.

b) Bestem egenværdierne for M, og forklar betydningen af egenværdierne for fordelingen af unge og gamle dyr i populationen.

Besvarelse

skal *ikke* regnes

1215

Opgaveformulering

I et koordinatsystem bevæger et punkt P sig således, at til tidspunktet t er stedvektoren $\vec{r}$ til P givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^5 - t \end{pmatrix}, \quad -2 \le t \le 2.$$

Punktet P passerer punktet $Q(1,0)$ til tidspunkterne t_1 og t_2.

a) Bestem t_1 og t_2.

Mellem de to tidspunkter t_1 og t_2 afsnører banekurven i 1. og 4. kvadrant en punktmængde M, der har et areal T. Det oplyses, at

$$T = \tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \vec{r}\,'(t)\cdot\hat{\vec{r}}(t)\ dt\,.$$

b) Bestem arealet T af punktmængden M.

Besvarelse

a)

Kravet om at $\vec{r}(t) = (1, 0)$. betyder at koordinatfunktionen for x skal give 1.
Samtlige løsninger til den første ligning $t^2 = 1$ er -1 og 1. Så svaret er $t_1 = -1$ *og* $t_2 = 1$.

Det bemærkes at koordinatfunktionen for y samtidig *skal* give 0.

Det ses at stemme da $(-1)^5 - (-1) = 0$ *og* $1^5 - 1 = 0$.
Men egentlig behøver vi ikke at teste det, for opgaveteksten fortæller jo at der er 2 løsninger.
Hvis ikke y-koordinaten stemte ville der være fejl i opgaveformuleringen.

b)
Vi præsenteres her for en formel til bestemmelse af areal afsnøret af en kurve.
Den indgår ikke i pensum, og den står heller ikke i formelsamlingen.
Men pyt den stå jo netop her, så det er bare at sætte ind.

Vi definerer først: $\vec{r}(t) := \langle t^2, t^5 - t\rangle = t \rightarrow \langle t^2, t^5 - t\rangle$

Maple kan beregne integralet i et hug idet vi bruger '.' for prikprodukt og gym-pakkens 'hat'-kommando:

Arealet af M er: $\frac{1}{2}\int_1^2 \vec{r}\,'(t).hat(\vec{r}(t))\,\mathrm{d}t = \frac{596}{21} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 28.381$

Prikproduktet $\vec{r}\,' \cdot \hat{\vec{r}}$ er lig determinanten af $\vec{r}$ og $\vec{r}\,'$, så det kan også skrives:

$$\frac{1}{2}\int_1^2 det(\vec{r}(t), \vec{r}\,'(t))\,\mathrm{d}t = \frac{596}{21}$$

1216

Opgaveformulering

En funktion f af to variable er bestemt ved

$$f(x,y) = 0{,}1 \cdot x^2 - 0{,}8 \cdot x + 0{,}1 \cdot y^2 .$$

a) Tegn grafen for f.

I en model har lampeskærmen til en bestemt standerlampe form som en del af grafen for f. I modellen er lampen monteret på en stang i punktet $P(0,0,0)$. Stangens endeflade i monterings-punktet P er en del af tangentplanen α til grafen for f i P.

b) Bestem en ligning for α.

Den cirkulære ydre kant af lampen kan i modellen beskrives som niveaukurven, der er givet ved $f(x,y) = 0{,}9$.

c) Bestem radius i denne cirkel.

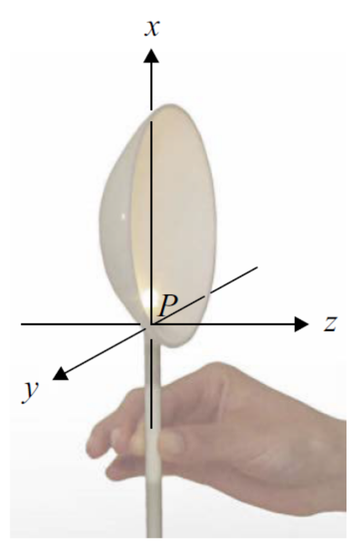


Foto: www.archiexpo.com

Besvarelse

a)

Jeg definerer: $f(x, y) := 0.1 \cdot x^2 - 0.8\,x + 0.1\,y^2 = (x, y) \rightarrow 0.1\,x^2 + (-1) \cdot 0.8\,x + 0.1\,y^2$

og lader Maple beregne de partielle afledede:

x: $diff(f(x, y), x) = 0.2\,x - 0.8 \xrightarrow{\text{assign to a name}} fx(x, y)$

y: $diff(f(x, y), y) \quad 0.2\,y \xrightarrow{\text{assign to a name}} fy(x, y)$

Derudover definerer jeg: $xo := 0 :\quad yo := 0 :\; zo := f(xo, yo) :$

Nu kan jeg opskrive den generelle liging for tangetplanen, og Maple reducerer den så selv:

Ligning for α: $z = zo + fx(xo, yo) \cdot (x - xo) + fy(xo, yo) \cdot (y - yo) = z = -0.8\,x$

b)

En niveaukurve i højden z, bestemmes ved at sætte forskriften for f(x,y)=z:

$f(x, y) = 0.9 = 0.1\,x^2 - 0.8\,x + 0.1\,y^2 = 0.9$

Denne kan manuelt omskrives:

$0.1\,x^2 - 0.8\,x + 0.1\,y^2 = 0.9 \Leftrightarrow x^2 - 8\,x + y^2 = 9 \Leftrightarrow$

$(x-4)^2 - 16 + y^2 = 9 \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 5^2.$

Nu kan vi alfæse at radius i den cirkel niveaukurven udgør er 5.

1217

Opgaveformulering

En bestemt beholder, der er fyldt med væske, har en aftapningshane i bunden. I en model kan væskehøjden i beholderen beskrives ved

$$\frac{dh}{dt} = -15 \cdot h^{-\frac{3}{2}},$$

hvor $h(t)$ betegner væskehøjden (målt i cm) til tidspunktet t (målt i sekunder efter åbning af hanen). Til tidspunktet $t = 0$ er væskehøjden 30 cm.

a) Bestem en forskrift for h.

b) Tegn et hældningsfelt sammen med grafen for den fundne løsning.

c) Bestem det tidspunkt, hvor beholderen er tom.

Besvarelse

a)

Jeg bruger Maples kommando til at løse differentialligninger:

$$dsolve\left(\left[h'(t) = -15 \cdot h(t)^{-1.5}, h(0) = 30\right]\right) = h(t) = \frac{\left(28800\sqrt{30} - 1200\,t\right)^{2/5}}{4}$$

Det ville være naturligt her at definere en funktion h(t), men der går kludder i det følgende, hvis man kalder den h(t), og også hvis man igen evaluerer dsolve ovenfor. Derfor definerer vi den under et andet navn H(t).

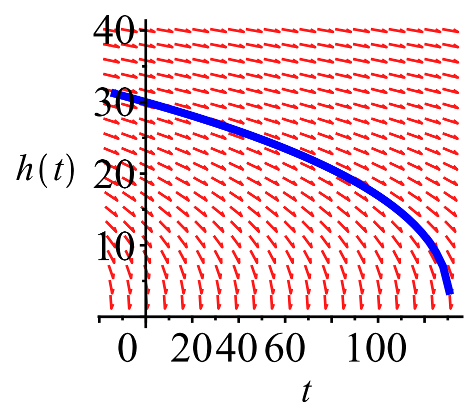
$$H(t) := \frac{\left(28800\sqrt{30} - 1200\,t\right)^{2/5}}{4} = t \rightarrow \frac{1}{4}\left(28800\sqrt{30} - 1200\,t\right)^{2/5}$$

c)

Det kan være noget vanskeligt at vælge det rigtige område at tegne hældningsfelt og graf i. Her er det en hjælp at svare på spm c først, og det kan let klares ved at løse ligningen H(t)=0:

Det tidspunkt hvor beholderen er tom er: $H(t) = 0. \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 131.4534138\}$

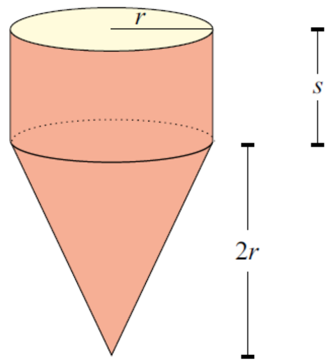
b)

Nu ved vi, at det relevante område er frem til 131 hvor beholderne er tom. (Prøver vi at gå længere frem fås en fejl. Det viser sig nemlig, at definitionsmængden for H(t) kun går til 131,45.) For at tegne hældningsfelt kræves en særlig pakke i Maple den loades først: $with(DEtools)$: Herefter kan kommandoen vist øverst til højre tegne både felt og løsningskurve i et plot. Bemærk at argumenterne til plotfunktionen er: 1. differentialligningen 2. navnet på funktionen 3. område for den uafhængige variabel 4. område for den afhænge variabel 5. betingelse der giver den ønskede løsning 6. grafiske options.	$DEplot\left(h'(t) = -15 \cdot h(t)^{-1.5}, h(t), t = -15..131, h = 0..40, [h(0) = 30], linecolor = blue\right)$ 

1218

Opgaveformulering

En tragt er sammensat af en åben cylinder og en kegle (se figuren). Keglens grundflade og cylinderen har samme radius r, målt i dm. Keglens højde er det dobbelte af dens radius. Hele tragten kan rumme 40 dm^3.



a) Bestem cylinderens højde s som funktion af r.

b) Gør rede for, at tragtens ydre overflade O som funktion af r kan beskrives ved

$$O(r) = \pi(\sqrt{5} - \frac{4}{3}) \cdot r^2 + \frac{80}{r}.$$

c) Bestem r, således at tragtens ydre overfladeareal er mindst mulig, når $0 < r < 4$.

Besvarelse

a)

Tragtens rumfang, der har værdien 40, er lig summen af cylinderens og keglens rumfang. Formlerne for disse kan slås op i formelsamlingen side 47 og det giver ligningen:

$$\pi \cdot r^2 \cdot s + \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot 2\, r = 40 \xrightarrow{\text{solve for s}} \left[\left[s = -\frac{2\,(\pi\, r^3 - 60)}{3\,\pi\, r^2}\right]\right]$$

Cylinderens højde s som funktion af r er altså: $s(r) = \dfrac{2\,(60 - \pi\, r^3)}{3\,\pi\, r^2}$

b)

Formlen for den krumme overflade af en cylinder er $2\,\pi \cdot r \cdot h$ som her er $2\,\pi \cdot r \cdot s$.

Formlen for den krumme overflade af en kegle er $\pi \cdot r \cdot s$ hvor $s = \sqrt{r^2 + h^2}$.

I denne opgave er h=2r så keglens krumme overflade er $\pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + (2\,r)^2} = \pi\, r\sqrt{5}\,\sqrt{r^2}$.

Tragtens samlede overflade er summen af de to dvs: $2\,\pi \cdot r \cdot s + \pi\, r\sqrt{5}\,\sqrt{r^2}$.

Heri indsættes udtrykket for s som funktion af r og dermed fås den ydre overflade:

$$2\,\pi \cdot r \cdot \frac{2\,(60 - \pi\, r^3)}{3\,\pi\, r^2} + \pi\, r\sqrt{5}\,\sqrt{r^2} = \xrightarrow{\text{simplify symbolic}} \frac{3\,\pi\, r^3\sqrt{5} - 4\,\pi\, r^3 + 240}{3\,r}$$

Divideres 3r op i de enkelte led fås: $\pi \cdot r^2\sqrt{5} - \frac{4}{3}\pi \cdot r^2 + \frac{80}{r}$.

Både π og r^2 optræder i begge de to forreste led, så de kan sætte uden for en parentes.

Dermed fås det ønskede udtryk for den ydre overflade af keglen: $\pi\left(\sqrt{5} - \frac{4}{3}\right) \cdot r^2 + \frac{80}{r}$.

c)

For overblikkets skyld plottes O(r) (til højre), og vi ser at der er et lokalt minimum lidt efter x=2.

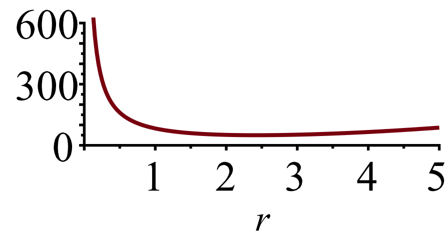
Jeg lader derfor Maple løse O'(r)=0: med metoden:
'numerically solve from point' hvor jeg angiver 2 som udgangspunkt:

$$\frac{d}{dr}\left(\pi\cdot\left(\sqrt{5}-\frac{4}{3}\right)r^2+\frac{80}{r}\right)=0 \xrightarrow{\text{solve}}$$

2.416109815

Den værdi der giver tragten den mindste ydre overflade er altså r=2,42.

$$plot\left(\pi\cdot\left(\sqrt{5}-\frac{4}{3}\right)r^2+\frac{80}{r}, r=0..5\right)$$



(15.18.2.1)